**量子力学 II 試験問題**　2021 年 7 月 28 日　田崎晴明

---

- 答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと。
- 問題は全部で 4 問ある。同じ解答用紙に異なった問題の答えを書かないように。
- 試験が終わったら、解答を適切な方法で電子ファイルにして、問題ごとに別のメールに添付し専用アドレスに送ること。メールの件名はそれぞれ `ex1`, `ex2`, `ex3`, `ex4` とする（数字はもちろん問題番号）。メールの本文と解答用紙の**両方に**学籍番号と氏名を必ず書くこと。いわゆる白紙答案の場合には何も添付せずメール本文に「答案なし」と明記すること（白紙の問題が複数ある場合はそれぞれの問題についてメールを送るように）。
- 締め切りは 7 月 29 日の正午とする。なんらかの事故があったらすぐに連絡すること。
- 上記の指示を守っていなかったためにミスが生じて評価に影響があったとしてもそれは本人の責任なので原則として修正しない。

---

**1.**　1 次元の長さ $L$ の区間上の 1 粒子の量子力学を考える。空間の座標 $x$ は $0 \le x \le L$ を満たす。ある瞬間での粒子の状態が波動関数

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\!\left(\frac{n\pi}{L}\,x\right) \tag{1}$$

で表わされるとする。ここで $n = 1, 2, \ldots$ は定数である。

(a) 運動量演算子を $\hat{p}$ と書く。状態 (1) に関する期待値 $\langle \hat{p} \rangle_\varphi$, $\langle \hat{p}^2 \rangle_\varphi$ を求めよ。

(b) 上で求めた期待値を使って、運動量のゆらぎ $\sigma_\varphi[\hat{p}] := \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle_\varphi - (\langle \hat{p} \rangle_\varphi)^2}$ を求めよ。

(c) $n$ を大きくする極限でゆらぎはどのように振る舞うか。また、そのような振る舞いが見られる理由を述べよ。

**2.**　$\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_\mathrm{x}, \hat{p}_\mathrm{y}, \hat{p}_\mathrm{z})$ を 3 次元での位置演算子、運動量演算子とする。角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{L}} := \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ と定義する。位置演算子と運動量演算子の交換関係は既知として用いてよい。

交換子 $[\hat{L}_\mathrm{y}, \hat{x}^2]$, $[\hat{L}_\mathrm{y}, \hat{y}^2]$, $[\hat{L}_\mathrm{y}, \hat{z}^2]$ および $[\hat{L}_\mathrm{y}, \hat{\boldsymbol{r}}^2]$ を求めよ。ただし、$\hat{\boldsymbol{r}}^2 := \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2$ である。

**3.** 3次元での質量 $m$ の自由粒子の（定常状態の）シュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(x,y,z) = E\,\varphi(x,y,z) \tag{2}$$

を考え、正の定数 $R$ について、$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq R$ なら $\varphi(x,y,z)=0$ という境界条件を課す（つまり原点から $R$ 以上離れたところには無限大のポテンシャルがある）。

定常状態（エネルギー固有状態）の波動関数が

$$\varphi(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\sin\!\left(k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq R \text{ のとき} \\ 0 & \sqrt{x^2+y^2+z^2} \geq R \text{ のとき} \end{cases} \tag{3}$$

と書けるとする。境界条件（波動関数の連続性）に注意して定数 $k>0$ の取りうる値を求めよ。さらに、(3) が $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq R$ で方程式 (2) を満たすことを示し、対応するエネルギー固有値 $E$ を求めよ。

一般の一変数関数 $f(r)$ について、

$$\Delta f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) = \left. f''(r) + \frac{2}{r}\,f'(r)\right|_{r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{4}$$

が成り立つことを証明なしで用いてよい。

**4.** 単独の（大きさ 1/2 の）スピン角運動量演算子を行列表示で、

$$\hat{S}_{\mathrm{x}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\mathrm{y}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\mathrm{z}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と表わす。

(a) $\hat{S}_{\mathrm{x}}\hat{S}_{\mathrm{y}}$ および $\hat{S}_{\mathrm{y}}\hat{S}_{\mathrm{x}}$ を計算し、$[\hat{S}_{\mathrm{x}}, \hat{S}_{\mathrm{y}}]$ および $\hat{S}_{\mathrm{x}}\hat{S}_{\mathrm{y}} + \hat{S}_{\mathrm{y}}\hat{S}_{\mathrm{x}}$ を求めよ。

実定数 $\theta$ について $\hat{S}_\theta = \cos\theta\,\hat{S}_{\mathrm{x}} + \sin\theta\,\hat{S}_{\mathrm{y}}$ とする。また、$|\psi_\theta\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} \\ e^{i\theta/2} \end{pmatrix}$ という状態を考える。

(b) $\hat{S}_\theta$ の固有値をすべて求めよ。

(c) $|\psi_\theta\rangle$ が $\hat{S}_\theta$ の固有状態であることを示し、対応する固有値を求めよ。

(d) $|\psi_\theta\rangle$ において、$\hat{S}_{\mathrm{x}}$ と $\hat{S}_{\mathrm{y}}$ をそれぞれ測定した際の期待値 $\langle\psi_\theta|\hat{S}_{\mathrm{x}}|\psi_\theta\rangle$ と $\langle\psi_\theta|\hat{S}_{\mathrm{y}}|\psi_\theta\rangle$ を求めよ。結果は三角関数を用いてなるべく簡単に表すこと。