量子力学 II

2022 年 7 月 27 日　田崎晴明

答だけではなく考え方や計算の筋道を簡潔に書け（単純な計算問題は答だけでよい)。**第 n 問の解答は n 枚目の解答用紙に書く**こと（ここで、$n=1,2,3,4$)。解答用紙の裏面も使用してもよい（解答用紙のスペースが不足する場合には追加の用紙を渡す。一枚の用紙に複数の問題の解答を書かないこと)。2 学期になったら答案を受け取りに来ること（また連絡します)。2022 年 10 月を過ぎたら答案を予告なく処分する。

1.　1 次元の長さ L の区間上の 1 粒子の量子力学を考える。空間の座標 x は $0 \le x \le L$ を満たす。ある瞬間での粒子の状態が波動関数

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\Bigl(\frac{n\pi}{L}\,x\Bigr) \tag{1}$$

で表わされるとする。ここで $n=1,2,\ldots$ は定数である。

(a) 位置演算子を $\hat{x}$ と書く。状態 (1) に関する期待値 $\langle\hat{x}\rangle_{\varphi_n}$, $\langle\hat{x}^2\rangle_{\varphi_n}$ を求めよ。

(b) 上で求めた期待値を使って、位置のゆらぎ $\sigma_{\varphi_n}[\hat{x}] := \sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle_{\varphi_n} - (\langle\hat{x}\rangle_{\varphi_n})^2}$ を求めよ。

(c) ゆらぎ $\sigma_{\varphi_n}[\hat{x}]$ が最大になるのは n がいくつのときか？　そうなる物理的な理由も述べよ。

2.　$\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{x},\hat{y},\hat{z})$, $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_\mathrm{x},\hat{p}_\mathrm{y},\hat{p}_\mathrm{z})$ を 3 次元での位置演算子、運動量演算子とする。角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{L}} := \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ と定義する。位置演算子と運動量演算子の交換関係は既知として用いてよい。

交換子 $[\hat{L}_\mathrm{y},(\hat{p}_\mathrm{x})^2]$, $[\hat{L}_\mathrm{y},(\hat{p}_\mathrm{y})^2]$, $[\hat{L}_\mathrm{y},(\hat{p}_\mathrm{z})^2]$ および $[\hat{L}_\mathrm{y},\hat{\boldsymbol{p}}^2]$ を求めよ。ただし、$\hat{\boldsymbol{p}}^2 := (\hat{p}_\mathrm{x})^2 + (\hat{p}_\mathrm{y})^2 + (\hat{p}_\mathrm{z})^2$ である。

3.　粒子の質量を m とし、ω を正の定数とする。3 次元の調和振動子のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(x,y,z) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2+z^2)\,\varphi(x,y,z) = E\,\varphi(x,y,z) \tag{2}$$

を考えよう。

(a) 角振動数 ω の 1 次元の調和振動子のエネルギー固有値が $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ $(n=0,1,2,\ldots)$ であることを用いて、(2) から決まる基底エネルギーと第一励起エネルギーを求めよ。また、基底状態と第一励起状態それぞれ何重に縮退しているか？
細かい計算は必要ない。基本的な考え方と結果だけを記せ。

シュレディンガー方程式 (2) を極座標で書き直すと、$r \geq 0$ について

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right\}R(r)+\frac{m\omega^2}{2}r^2\,R(r)=E\,R(r) \qquad (3)$$

という方程式が得られる。ここで $R(r)$ は波動関数の動径部分であり、$\ell=0,1,2,\ldots$ は軌道角運動量の大きさである（波動関数の規格化は考慮しない)。

(b) $\ell=0$ とする。適切な定数 a について $R(r)=\exp[-a\,r^2/2]$ という形の (3) の解があることを示し、この場合の a と E を求めよ。これを (a) の結果と比較せよ。縮退の次数にも注意すること。

(c) 適切な定数 a について $R(r)=r\,\exp[-a\,r^2/2]$ という形の (3) の解があることを示し、この場合の ℓ と a と E を求めよ。これを (a) の結果と比較せよ。縮退の次数にも注意すること。

4. 単独の（大きさ 1/2 の）スピン角運動量演算子を行列表示で以下のように表わす。

$$\hat{S}_{\mathrm{x}}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \hat{S}_{\mathrm{y}}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \hat{S}_{\mathrm{z}}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

(a) $[\hat{S}_{\mathrm{x}},\hat{S}_{\mathrm{y}}]$ および $\hat{S}_{\mathrm{x}}\hat{S}_{\mathrm{y}}+\hat{S}_{\mathrm{y}}\hat{S}_{\mathrm{x}}$ を求めよ。

(b) 演算子 $\hat{S}_{\mathrm{y}}$ の固有値と固有状態を求めよ。

(c) 一般の状態 $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$（ただし $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$）において $\hat{S}_{\mathrm{z}}$ を測定したときどのような値がどのような確率で得られるか答えよ。また、同じ状態で $\hat{S}_{\mathrm{y}}$ を測定したときどのような値がどのような確率で得られるか答えよ。