試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 III	2012 年 1 月 18 日	水	2	田崎

答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答だけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2012 年 9 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0.　**これは冒頭に書くこと。**レポートの提出状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす)。レポートは、返却済みのものも新規のものも、答案といっしょに提出すること。

1.　角運動量の合成の問題。大きさ 2 と大きさ 1 の角運動量を合成しよう。講義と同じ記法を使う場合、記号の細かい定義をする必要はない。きちんと定義してあれば、講義とは別の書き方を使ってもかまわない。説明等は最小限でよい。

合成した角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{J}} = (\hat{J}_{\mathrm{x}}, \hat{J}_{\mathrm{y}}, \hat{J}_{\mathrm{z}})$ とする。$(\hat{\boldsymbol{J}})^2$ の固有値を $J(J+1)$ と書き、$\hat{J}_{\mathrm{z}}$ の固有値を J_{z} と書く。また、対応する同時固有状態を $\boldsymbol{\Phi}_{J,J_{\mathrm{z}}}$ と書く。

(a) J のとりうる値を求めよ。また各々の J について、J_{z} の取りうる値を求めよ。

(b) J のとりうる最大値を $J_{\max}$ とする。$J = J_{\max}, J_{\max} - 1$ と対応するすべての J_{z} について同時固有状態を $\boldsymbol{\Phi}_{J,J_{\mathrm{z}}}$ を、合成前の角運動量の固有状態（正確に言えば、角運動量の大きさと z 成分が確定した状態）を使って表わせ（試験後に付記：ちょっと計算する量が多すぎたので、J_{z} の大きい方だけ計算すればいいよと途中で指示。それでも全て完璧に計算した人もいたけど)。

なお、角運動量の固有状態についての一般公式

$$\boldsymbol{\varphi}_{j,m-1} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}} \frac{1}{\hbar} \hat{J}_{-} \boldsymbol{\varphi}_{j,m} \tag{1}$$

を証明なしで用いてよい。

2.　摂動計算の問題。摂動の基本的な公式は導出なしで用いてよい。

2 次元空間（デカルト座標 x, y で表わす）での調和振動子を扱う。非摂動のシュレディンガー方程式は

$$\Big\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}\Big)+\frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)\Big\}\varphi(x,y)=E\,\varphi(x,y) \tag{2}$$

である（難しそうに見えるかも知れないが、単に独立な 1 次元調和振動子が二つあるだけ)。もちろん、質量 m と角振動数 ω は正の定数。この系の基底状態はただ一つで、その波動関数は

$$\psi_{0,0}(x,y)=\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\,\exp\Big[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)\Big] \tag{3}$$

である。また第 1 励起状態は 2 重に縮退しており、それらの波動関数は、たとえば、

$$\psi_{1,0}(x,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{m\omega}{\hbar}\,x\,\exp\Big[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)\Big] \tag{4}$$

$$\psi_{0,1}(x,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{m\omega}{\hbar}\,y\,\exp\Big[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)\Big] \tag{5}$$

と取れる。上の三つの状態は規格化されている。

(a) 非摂動の系 (2) の基底エネルギー E_0 と第 1 励起エネルギー E_1 を求めよ（これは結果の暗記を問う問題ではないし、シュレディンガー方程式を解くことを要求している問題でもないことに注意)。

この系に

$$V(x,y)=v\,(x+y)^2 \tag{6}$$

というポテンシャルを摂動として加える（v は定数)。

(b) 基底エネルギーの変化を摂動の 1 次の計算で求めよ。

(c) 第 1 励起エネルギーの変化を摂動の 1 次の計算で求めよ。

$a>0$ のときのガウス積分の公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-a\,x^2}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\qquad\int_{-\infty}^{\infty}dx\,x^2\,e^{-a\,x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\,a^{3/2}} \tag{7}$$

を導出なしで用いてよい（試験後付記：すみません $\int_{-\infty}^{\infty}dx\,x^4\,e^{-a\,x^2}$ も必要でした。みなさん、ちゃんと導出してましたけど)。

3. スピン 1/2 の系を考える。まず単独のスピンについて、$(\hat{S}_\mathrm{x}, \hat{S}_\mathrm{y}, \hat{S}_\mathrm{z})$ をスピン角運動量の演算子とする。また、$|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ を

$$\hat{S}_\mathrm{z}|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle, \quad \hat{S}_\mathrm{z}|\downarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle \tag{8}$$

を満たす状態（つまり、$\hat{S}_\mathrm{z}$ の固有状態）とする。「斜め 45 度方向」のスピン演算子を

$$\hat{S}_{45^\circ} := \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\hat{S}_\mathrm{x} + \hat{S}_\mathrm{z}\big) \tag{9}$$

と定義する。

(a)

$$\hat{S}_{45^\circ}|\nearrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\nearrow\rangle, \quad \hat{S}_{45^\circ}|\swarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\swarrow\rangle \tag{10}$$

を満たす状態（つまり、$\hat{S}_{45^\circ}$ の固有状態）を $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ で表わせ。

次に二つの（やはり大きさ 1/2 の）スピンからなる系を考える。講義と同様に二つの系を添え字 1,2 で区別する。

上で求めた「斜め」の固有状態を用いて、

$$\boldsymbol{\varphi} := \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\nearrow\rangle_1\,|\swarrow\rangle_2 - |\swarrow\rangle_1\,|\nearrow\rangle_2\Big) \tag{11}$$

という状態を定義する。

(b) 状態 $\boldsymbol{\varphi}$ を、$|\uparrow\rangle_1, |\downarrow\rangle_1, |\uparrow\rangle_2, |\downarrow\rangle_2$ を用いて書き直せ。

(c) 状態 $\boldsymbol{\varphi}$ において、$\hat{S}^{(1)}_{45^\circ}$ を測定した。どのような値が、どのような確率で得られるか。

(d) $\hat{S}^{(1)}_{45^\circ}$ の測定が終わったあと、$\hat{S}^{(2)}_\mathrm{z}$ を測定した。上の $\hat{S}^{(1)}_{45^\circ}$ の測定結果の各々に対して、$\hat{S}^{(2)}_\mathrm{z}$ の測定でどのような値がどのような確率で得られるかを求めよ。

ヒント： （使わなくてもいいです）$\hat{S}_\mathrm{x}$ の $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ への作用は

$$\hat{S}_\mathrm{x}\,|\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle, \quad \hat{S}_\mathrm{x}\,|\downarrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle \tag{12}$$

である。また、スピン演算子の行列表示は、

$$\hat{S}_\mathrm{x} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_\mathrm{y} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_\mathrm{z} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

である。