

試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 III	2013年1月30日	水	2	田崎

答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答だけでもいいが）。解答の順番は（0番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2013年9月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. これは冒頭に書くこと。レポートの提出状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、答案と一っしょに提出すること。

1. 角運動量の合成の問題。大きさ2と大きさ1/2の角運動量を合成しよう。講義と同じ記法を使う場合、記号の細かい定義をする必要はない。きちんと定義してあれば、講義とは別の書き方を使ってもかまわない。説明等は最小限でよい。

合成した角運動量演算子を $\hat{\mathbf{J}} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$ とする。 $(\hat{\mathbf{J}})^2$ の固有値を $J(J+1)$ と書き、 \hat{J}_z の固有値を J_z と書く。また、対応する同時固有状態を Φ_{J,J_z} と書く。

(a) J のとりうる値を求めよ。また各々の J について、 J_z のとりうる値を求めよ。

(b) J, J_z のとりうる値すべてについて対応する同時固有状態を Φ_{J,J_z} を、合成前の角運動量の固有状態（正確に言えば、角運動量の大きさと z 成分が確定した状態）を使って表わせ。

なお、角運動量の固有状態についての一般公式

$$\varphi_{j,m-1} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}} \frac{1}{\hbar} \hat{J}_- \varphi_{j,m} \quad (1)$$

を証明なしで用いてよい。

2. 摂動計算の問題。摂動の基本的な公式は導出なしで用いてよい。

(x, y) をデカルト座標とし、 $0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L$ で指定される $L \times L$ の正方形の領域での質量 m のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \varphi(x, y) + V(x, y) \varphi(x, y) = E \varphi(x, y) \quad (2)$$

を考える。正方形の境界上で $\varphi(x, y) = 0$ という境界条件をとる。

- (a) $V(x, y) = 0$ とした問題での基底状態と第一励起状態のエネルギーと波動関数を求めよ。第一励起状態は二重に縮退していることに注意。
- (b) $V(x, y) = v_0 \delta(x - \frac{L}{2}) \delta(y - \frac{L}{2})$ とする (v_0 は定数)。基底状態と第一励起状態のエネルギーを $V(x, y)$ を摂動と扱って一次までの範囲で求めよ (縮退が解ける場合は、両方のエネルギーを書くこと)。
- (c) $V(x, y) = v_0 \delta(x - \frac{L}{4}) \delta(y - \frac{L}{4})$ とする (v_0 は定数)。基底状態と第一励起状態のエネルギーを $V(x, y)$ を摂動と扱って一次までの範囲で求めよ (縮退が解ける場合は、両方のエネルギーを書くこと)。

3. 単独のスピン $1/2$ の系を考える。講義と同じようにスピンの z -方向上向きの状態を $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、 z -方向下向きの状態を $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と表わす。

角度 θ について

$$\hat{S}_\theta := \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (3)$$

という演算子を定義する。

- (a) \hat{S}_θ の固有値を求めよ (答だけ書いても点は与えない)。
- (b) 固有値 $\hbar/2$ (←ヒントだ!) に対応する \hat{S}_θ の固有状態を求めよ。規格化すること。
- (c) 大きさ $1/2$ のスピンをもつ粒子について \hat{S}_θ を測定したところ、 $\hbar/2$ という測定結果が得られた。測定の直後に \hat{S}_ϕ を測定したときの期待値を求めよ (もちろん ϕ も角度)。