| 試験問題 | | 試験日 | 曜日 | 時限 | 担当者 |
|---|---|---|---|---|---|
| 科目名 | 量子力学 III | 2014 年 1 月 29 日 | 水 | 2 | 田崎 |

**答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答だけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2014 年 9 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。**

**0.** **これは冒頭に書くこと。**レポートの提出状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、答案といっしょに提出すること。

**1.** 角運動量の合成の問題。大きさ 3 と大きさ 1/2 の角運動量を合成しよう。講義と同じ記法を使う場合、記号の細かい定義をする必要はない。きちんと定義してあれば、講義とは別の書き方を使ってもかまわない。説明等は最小限でよい。

合成した角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{J}} = (\hat{J}_{\mathrm{x}}, \hat{J}_{\mathrm{y}}, \hat{J}_{\mathrm{z}})$ とする。$(\hat{\boldsymbol{J}})^2$ の固有値を $J(J+1)$ と書き、$\hat{J}_{\mathrm{z}}$ の固有値を $J_{\mathrm{z}}$ と書く。また、対応する同時固有状態を $\boldsymbol{\Phi}_{J,J_{\mathrm{z}}}$ と書く。

(a) $J$ のとりうる値を求めよ。また各々の $J$ について、$J_{\mathrm{z}}$ の取りうる値を求めよ。

(b) $J$, $J_{\mathrm{z}}$ に対応する規格化された同時固有状態を $\boldsymbol{\Phi}_{J,J_{\mathrm{z}}}$ と書く。$\boldsymbol{\Phi}_{7/2,7/2}$, $\boldsymbol{\Phi}_{7/2,5/2}$, $\boldsymbol{\Phi}_{5/2,5/2}$ を、合成前の角運動量の固有状態（正確に言えば、角運動量の大きさと z 成分が確定した状態）を使って表わせ。

なお、角運動量の固有状態についての一般公式

$$\boldsymbol{\varphi}_{j,m} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}}\frac{1}{\hbar}\,\hat{J}_{-}\,\boldsymbol{\varphi}_{j,m+1} \tag{1}$$

を証明なしで用いてよい。

**2.** 摂動計算の問題。摂動の基本的な公式は導出なしで用いてよい。

$(x,y)$ をデカルト座標とし、$0 \le x \le L$, $0 \le y \le L$ で指定される $L \times L$ の正方形の領域での質量 $m$ の粒子のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}\Big)\varphi(x,y) + V(x,y)\,\varphi(x,y) = E\,\varphi(x,y) \tag{2}$$

を考える。正方形の境界上で $\varphi(x,y)=0$ という境界条件をとる。

(a) $V(x,y)=0$ とした問題での基底状態と第一励起状態のエネルギーと波動関数を求めよ。第一励起状態は二重に縮退していることに注意。

(b) $V(x,y)=v_0\,\delta(x-\dfrac{L}{2})\,\delta(y-\dfrac{L}{2})$ とする（$v_0$ は定数）。基底状態と第一励起状態のエネルギーを $V(x,y)$ を摂動と扱って一次までの範囲で求めよ。縮退が解けるなら、両方のエネルギーを書き、新たなエネルギー固有状態を示せ。

(c) $V(x,y)=v_1\,\delta(x-y)$ とする（$v_1$ は定数）。基底状態と第一励起状態のエネルギーを $V(x,y)$ を摂動と扱って一次までの範囲で求めよ。縮退が解けるなら、両方のエネルギーを書き、新たなエネルギー固有状態を示せ。

**3.** スピン 1/2 の粒子二つからなる系を扱う。z 方向の上向き・下向きのスピン状態を $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ と書き、

$$\mathbf{\Phi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{\,|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2-|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\,\},\quad \mathbf{\Phi}'=\frac{1}{\sqrt{2}}\{\,|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2+|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\,\} \tag{3}$$

とする。

また、講義と同様に、x 方向の上向き・下向きのスピン状態を $|\rightarrow\rangle$, $|\leftarrow\rangle$ と書こう。そして、

$$\mathbf{\Psi}_{0,0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{\,|\rightarrow\rangle_1|\leftarrow\rangle_2-|\leftarrow\rangle_1|\rightarrow\rangle_2\,\}, \tag{4}$$

$$\mathbf{\Psi}_{1,1}=|\rightarrow\rangle_1|\rightarrow\rangle_2,\quad \mathbf{\Psi}_{1,0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{\,|\rightarrow\rangle_1|\leftarrow\rangle_2+|\leftarrow\rangle_1|\rightarrow\rangle_2\,\},\quad \mathbf{\Psi}_{1,-1}=|\leftarrow\rangle_1|\leftarrow\rangle_2 \tag{5}$$

と定義する。

$\mathbf{\Phi}$ および $\mathbf{\Phi}'$ を、$\mathbf{\Psi}_{0,0}$, $\mathbf{\Psi}_{1,1}$, $\mathbf{\Psi}_{1,0}$, $\mathbf{\Psi}_{1,-1}$ の線形結合で表わせ。

**ヒント：**（使わなくてもいいです）$S=1/2$ のスピン演算子の行列表示は、

$$\hat{S}_{\mathrm{x}}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \hat{S}_{\mathrm{y}}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\quad \hat{S}_{\mathrm{z}}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \tag{6}$$

である。