試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 III	2015 年 1 月 28 日	水	2	田崎

答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答だけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2015 年 9 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. **これは冒頭に書くこと。**レポートの提出状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、答案といっしょに提出すること。

1. 角運動量の合成の問題。大きさ 2 と大きさ 1/2 の角運動量を合成しよう。講義と同じ記法を使う場合、記号の細かい定義をする必要はない。きちんと定義してあれば、講義とは別の書き方を使ってもかまわない。説明等は最小限でよい。

合成した角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{J}} = (\hat{J}_{\mathrm{x}}, \hat{J}_{\mathrm{y}}, \hat{J}_{\mathrm{z}})$ とする。$(\hat{\boldsymbol{J}})^2$ の固有値を $J(J+1)$ と書き、$\hat{J}_{\mathrm{z}}$ の固有値を J_{z} と書く。また、対応する同時固有状態を $\boldsymbol{\Phi}_{J,J_{\mathrm{z}}}$ と書く。

(a) J のとりうる値を求めよ。また各々の J について、J_{z} の取りうる値を求めよ。

(b) J, J_{z} に対応する規格化された同時固有状態を $\boldsymbol{\Phi}_{J,J_{\mathrm{z}}}$ と書く。$\boldsymbol{\Phi}_{5/2,5/2}$, $\boldsymbol{\Phi}_{5/2,3/2}$, $\boldsymbol{\Phi}_{3/2,3/2}$ を、合成前の角運動量の固有状態（正確に言えば、角運動量の大きさと z 成分が確定した状態）を使って表わせ。

なお、角運動量の固有状態についての一般公式

$$\boldsymbol{\varphi}_{j,m} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}} \frac{1}{\hbar} \hat{J}_- \boldsymbol{\varphi}_{j,m+1} \tag{1}$$

を証明なしで用いてよい。

2. 摂動計算の問題。摂動の基本的な公式は導出なしで用いてよい。

1 次元の区間 $[0, L]$ での自由粒子のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) = E\,\varphi(x) \tag{2}$$

を考える。周期的境界条件 $\varphi(x+L) = \varphi(x)$ を課す。

この系の基底状態 $\varphi_0(x)$ と二重に縮退した第一励起状態 $\varphi_+(x)$, $\varphi_-(x)$ は、

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}, \quad \varphi_+(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i2\pi x/L}, \quad \varphi_-(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i2\pi x/L} \tag{3}$$

で与えられる。

(a) 上の問題の基底エネルギーと第一励起状態のエネルギーを求めよ。

v_0 を正の定数とする。

(b) 摂動ポテンシャル $V_1(x) = v_0 \left\{ \delta\left(x - \frac{L}{4}\right) + \delta\left(x - \frac{L}{2}\right) \right\}$ が加わった際の基底状態と第一励起状態のエネルギーを摂動の一次までの範囲で求めよ。縮退が解けるなら、両方のエネルギーを書き、新たなエネルギー固有状態を示せ。

(c) 摂動ポテンシャル $V_2(x) = v_0 \left\{ \delta\left(x - \frac{L}{4}\right) - \delta\left(x - \frac{L}{2}\right) \right\}$ が加わった際の基底状態と第一励起状態のエネルギーを摂動の一次までの範囲で求めよ。縮退が解けるなら、両方のエネルギーを書き、新たなエネルギー固有状態を示せ。

3. 単独のスピン 1/2 の系を考え、

$$\hat{S}_{\mathrm{x}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\mathrm{y}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\mathrm{z}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

をスピン演算子の行列表示とする。

$$\hat{S}_{\mathrm{yz}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{S}_{\mathrm{y}} + \hat{S}_{\mathrm{z}}) \tag{5}$$

というスピン演算子を考える。

(a) $\hat{S}_{\mathrm{yz}}$ の固有値を求めよ（答えだけでは点は与えない）。

(b) $\hat{S}_{\mathrm{yz}}$ の固有値 $\hbar/2$ に対応する固有状態（固有ベクトル）を求めよ。

(c) $\hat{S}_{\mathrm{yz}}$ を測定したところ $\hbar/2$ が得られた。その直後に再び $\hat{S}_{\mathrm{yz}}$ を測定すると、どのような値がどのような確率で観測されるか。

(d) $\hat{S}_{\mathrm{yz}}$ を測定したところ $\hbar/2$ が得られた。その直後に $\hat{S}_{\mathrm{z}}$ を測定すると、どのような値がどのような確率で観測されるか。

(e) $\hat{S}_{\mathrm{yz}}$ を測定したところ $\hbar/2$ が得られた。その直後に $\hat{S}_{\mathrm{x}}$ を測定すると、どのような値がどのような確率で観測されるか。