試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 III	2017 年 1 月 25 日	水	2	田崎

答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答だけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2017 年 9 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. **これは冒頭に書くこと。**レポートの提出状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす)。レポートは、返却済みのものも新規のものも、答案といっしょに提出すること。

1. 角運動量の合成の問題。大きさ 2 と大きさ 1/2 の角運動量を合成しよう。講義と同じ記法を使う場合、記号の細かい定義をする必要はない。きちんと定義してあれば、講義とは別の書き方を使ってもかまわない。説明等は最小限でよい。

合成した角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{J}} = (\hat{J}_{\mathrm{x}}, \hat{J}_{\mathrm{y}}, \hat{J}_{\mathrm{z}})$ とする。$(\hat{\boldsymbol{J}})^2$ の固有値を $J(J+1)$ と、$\hat{J}_{\mathrm{z}}$ の固有値を J_{z} と書く。対応する規格化された同時固有状態を $|\Phi_{J,J_{\mathrm{z}}}\rangle$ とする。

(a) J のとりうる値を求めよ。また各々の J について、J_{z} の取りうる値を求めよ (結果だけでよい)。

(b) J のとりうる全ての値、対応するすべての正の J_{z} について、同時固有状態を $|\Phi_{J,J_{\mathrm{z}}}\rangle$ を求めよ。つまり、合成前の角運動量の固有状態（正確に言えば、角運動量の大きさと z 成分が確定した状態）を使って表わせ。

角運動量の固有状態についての以下の公式を証明なしで用いてよい。

$$|\psi_{j,m}\rangle = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}}\frac{1}{\hbar}\,\hat{J}_-\,|\psi_{j,m+1}\rangle \tag{1}$$

2. 摂動計算の問題。摂動の基本的な公式は導出なしで用いてよい。

2 次元空間での調和振動子を扱う。非摂動のシュレディンガー方程式は

$$\Bigl\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Bigl(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Bigr)+\frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)\Bigr\}\varphi(x,y) = E\,\varphi(x,y) \tag{2}$$

である（難しそうに見えるかも知れないが、単に独立な 1 次元調和振動子が二つあるだけ)。質量 m と角振動数 ω は正の定数。この系の基底状態はただ一つで、その波動関数は

$$\varphi_{0,0}(x,y) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\,\exp\Bigl[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)\Bigr] \tag{3}$$

である。また第1励起状態は2重に縮退しており、それらの波動関数は、たとえば、

$$\varphi_{1,0}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\frac{m\omega}{\hbar}\,x\;\exp\Bigl[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)\Bigr] \tag{4}$$

$$\varphi_{0,1}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\frac{m\omega}{\hbar}\,y\;\exp\Bigl[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)\Bigr] \tag{5}$$

と取れる。上の三つの状態は規格化されている。

(a) 非摂動の系 (2) の基底エネルギー E_0 と第1励起エネルギー E_1 を求めよ（これは結果の暗記を問う問題ではないし、シュレディンガー方程式を解くことを要求している問題でもないことに注意)。

この系に $V(x,y) = v\,\delta(x-a)\,\delta(y-a)$ というポテンシャルを摂動として加える (v,a は定数)。

(b) 基底エネルギーの変化を摂動の1次の計算で求めよ。

(c) 第1励起エネルギーの変化を摂動の1次の計算で求めよ。

3. スピン 1/2 の粒子二つからなる系を扱う。z 方向の上向き・下向きのスピン状態を $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ と書き、

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\bigl\{\,|\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2\,\bigr\}, \tag{6}$$

という状態における測定について以下に答えよ。

(a) 粒子1の $\hat{S}_{\mathrm{z}}$ を測定すると、どのような確率でどのような結果が得られるか。

(b) 粒子1の $\hat{S}_{\mathrm{z}}$ を測定したら $\hbar/2$ が得られた。このあと粒子2の $\hat{S}_{\mathrm{z}}$ を測定すると、どのような確率でどのような結果が得られるか。

(c) 粒子1の $\hat{S}_{\mathrm{x}}$ を測定すると、どのような確率でどのような結果が得られるか。

(d) 粒子1の $\hat{S}_{\mathrm{x}}$ を測定したら $\hbar/2$ が得られた。このあと粒子2の $\hat{S}_{\mathrm{x}}$ を測定すると、どのような確率でどのような結果が得られるか。

ヒント：（使わなくてもいいです）$S=1/2$ のスピン演算子の行列表示は、

$$\hat{S}_{\mathrm{x}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \hat{S}_{\mathrm{y}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \hat{S}_{\mathrm{z}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{7}$$

である。