試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 III	2018 年 1 月 24 日	水	2	田崎

答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答だけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2018 年 9 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. **これは冒頭に書くこと。**レポートの提出状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、答案といっしょに提出すること。

1. 角運動量の合成の問題。大きさ 1 との角運動量二つを合成しよう。講義と同じ記法を使う場合、記号の細かい定義をする必要はない。きちんと定義してあれば、講義とは別の書き方を使ってもかまわない。説明等は最小限でよい。

合成した角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{J}} = (\hat{J}_\mathrm{x}, \hat{J}_\mathrm{y}, \hat{J}_\mathrm{z})$ とする。$(\hat{\boldsymbol{J}})^2$ の固有値を $J(J+1)$ と、$\hat{J}_\mathrm{z}$ の固有値を J_z と書く。対応する規格化された同時固有状態を $|\Phi_{J,J_\mathrm{z}}\rangle$ とする。

(a) J のとりうる値を求めよ。また各々の J について、J_z の取りうる値を求めよ (結果だけでよい)。

(b) J のとりうる全ての値、対応するすべての 0 以上の J_z について、同時固有状態を $|\Phi_{J,J_\mathrm{z}}\rangle$ を求めよ。つまり、合成前の角運動量の固有状態（正確に言えば、角運動量の大きさと z 成分が確定した状態）を使って表わせ。

角運動量の固有状態についての以下の公式を証明なしで用いてよい。

$$|\psi_{j,m}\rangle = \frac{1}{\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}} \frac{1}{\hbar} \hat{J}_- \, |\psi_{j,m+1}\rangle \tag{1}$$

2. 摂動計算の問題。摂動の基本的な公式は導出なしで用いてよい。

2 次元空間での調和振動子を扱う。非摂動のシュレディンガー方程式は

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2) \right\} \varphi(x,y) = E\,\varphi(x,y) \tag{2}$$

である（難しそうに見えるかも知れないが、単に独立な 1 次元調和振動子が二つあるだけ）。質量 m と角振動数 ω は正の定数。この系の基底状態はただ一つで、その波動関数は

$$\varphi_{0,0}(x,y) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \, \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2) \right] \tag{3}$$

である。また第1励起状態は2重に縮退しており、それらの波動関数は、たとえば、

$$\varphi_{1,0}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{m\omega}{\hbar}\, x\ \exp\Big[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)\Big] \tag{4}$$

$$\varphi_{0,1}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{m\omega}{\hbar}\, y\ \exp\Big[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)\Big] \tag{5}$$

と取れる。上の三つの状態は規格化されている。

(a) 非摂動の系 (2) の基底エネルギー E_0 と第1励起エネルギー E_1 を求めよ（これは結果の暗記を問う問題ではないし、シュレディンガー方程式を解くことを要求している問題でもないことに注意)。

この系に $V(x,y) = v\,\delta(x-y)$ というポテンシャルを摂動として加える（v は定数)。

(b) 基底エネルギーの変化を摂動の1次の計算で求めよ。

(c) 第1励起エネルギーの変化を摂動の1次の計算で求めよ。

ガウス積分の公式を導出なしで用いてよい（ここで $a>0$ は定数)。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-a\,x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2\, e^{-a\,x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,a^{3/2}} \tag{6}$$

3. 単独のスピン 1/2 の系を考える。をスピン演算子の行列表示は以下の通り。

$$\hat{S}_{\mathrm{x}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\mathrm{y}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\mathrm{z}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

次のように演算子 $\hat{S}_{\mathrm{xz}}$ を定義する。

$$\hat{S}_{\mathrm{xz}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{S}_{\mathrm{x}} + \hat{S}_{\mathrm{z}}) \tag{8}$$

(a) $\hat{S}_{\mathrm{xz}}$ の固有値を求めよ（答えだけでは点は与えない)。

(b) $\hat{S}_{\mathrm{xz}}$ の固有値 $\hbar/2$ に対応する固有状態（固有ベクトル）を求めよ。

(c) $\hat{S}_{\mathrm{xz}}$ を測定したところ $\hbar/2$ が得られた。その直後に再び $\hat{S}_{\mathrm{xz}}$ を測定すると、どのような値がどのような確率で観測されるか。

(d) $\hat{S}_{\mathrm{xz}}$ を測定したところ $\hbar/2$ が得られた。その直後に $\hat{S}_{\mathrm{z}}$ を測定すると、どのような値がどのような確率で観測されるか。

(e) $\hat{S}_{\mathrm{xz}}$ を測定したところ $\hbar/2$ が得られた。その直後に $\hat{S}_{\mathrm{y}}$ を測定すると、どのような値がどのような確率で観測されるか。