量子力学 III 試験について　田崎晴明

- 問題は 3 ページから始まる。**試験開始までは問題を読まないこと。**（2 ページ目までには事前に目を通しておくこと。）
- まず、試験の準備をする。
  - 試験問題を参照できるようにする（印刷してもいいし、PC やタブレットなどで見られるようにしてもいい）。まだ見てはいけない。
  - 解答用紙を用意する。普通のレポート用紙でよい。問題は全部で 3 問なので、それぞれの問題の解答用紙の一枚目に問題番号、学籍番号、氏名をあらかじめ記入しておく。
  - 計算用紙を用意する。分量は自由。
  - 筆記用具も用意する。
- 自分で都合のよい時間をとり、正確に 90 分間の時間を測って受験する。「持ち込み不可」の試験と同じように問題文以外は何も参照してはいけない。もちろん、直接、間接に他人と相談してはいけない。試験中の質問は受け付けない（すみません）。
- 試験中に飲み食いしたりトイレに行ったりするのは自由。ただし、そのための時間延長はしないこと。
- 試験時間が終わったら答案を修正してはいけない。指示に従って答案を専用アドレスに送付する。もちろん答案の送付に使う時間は試験時間に含めないが、締め切りは 1 月 28 日の正午なので余裕を持って受験すること。
- 解答用紙の枚数は自由だが、なるべくまとめて丁寧に書くのが望ましい。
- 病気などの事情で遅れて提出する人がいるかもしれないので、私から G-Port 経由で連絡するまでは試験の内容について LINE や SNS などで他人に見える形に書いてはいけない。
- 以上の注意に反した場合には不正行為とみなされて処分の対象となることがある。

以下は問題ページ冒頭の注意だが、事前に読んでおくこと。

- 答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと。
- 問題は全部で 3 問ある。同じ解答用紙に異なった問題の答えを書かないように。
- 試験が終わったら、解答を適切な方法で電子ファイルにして、問題ごとに別のメールに添付し専用アドレスに送ること。メールの件名はそれぞれ `ex1`, `ex2`, `ex3` とする（数字はもちろん問題番号）。なお、いわゆる白紙答案の場合には何も添付せずメール本文に「答案なし」と明記すること。メールの本文と解答用紙の**両方に**学籍

番号と氏名を必ず書くこと。

- 締め切りは 1 月 28 日の正午とする。なんらかの事故があった場合にはすぐに連絡すること。
- 上記の指示を守っていなかったためにミスが生じて評価に影響があったとしてもそれは本人の責任なので原則として修正しない。

量子力学 III 試験問題　2021 年 1 月 27 日　田崎晴明

- 答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと。
- 問題は全部で 3 問ある。同じ解答用紙に異なった問題の答えを書かないように。
- 試験が終わったら、解答を適切な方法で電子ファイルにして、問題ごとに別のメールに添付し専用アドレスに送ること。メールの件名はそれぞれ `ex1`, `ex2`, `ex3` とする（数字はもちろん問題番号)。なお、いわゆる白紙答案の場合には何も添付せずメール本文に「答案なし」と明記すること。メールの本文と解答用紙の**両方に**学籍番号と氏名を必ず書くこと。
- 締め切りは 1 月 28 日の正午とする。なんらかの事故があった場合にはすぐに連絡すること。
- 上記の指示を守っていなかったためにミスが生じて評価に影響があったとしてもそれは本人の責任なので原則として修正しない。

---

1. 大きさ 1 の角運動量を持った粒子を考える。角運動量の z 成分の固有状態を講義と同様に $|+\rangle, |0\rangle, |-\rangle$ と書く。

大きさ 1 の角運動量を持った粒子が二つある。それぞれの粒子の角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{J}}^{(1)}$, $\hat{\boldsymbol{J}}^{(2)}$ とし、全系の角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{J}}^{(1)} + \hat{\boldsymbol{J}}^{(2)}$ とする。$\hat{\boldsymbol{J}}^2$ の固有値を $J(J+1)\hbar^2$ と、$\hat{J}_{\mathrm{z}}$ の固有値を $M\hbar$ と書き、対応する規格化された同時固有状態を $|\Phi_{J,M}\rangle$ とする。

(a) J のとりうる値を求めよ。また各々の J について、M の取りうる値を求めよ（結果だけでよい)。

(b) $\hat{\boldsymbol{J}}^2 = 4\hbar^2 + \hat{J}_+^{(1)}\hat{J}_-^{(2)} + \hat{J}_-^{(1)}\hat{J}_+^{(2)} + 2\hat{J}_{\mathrm{z}}^{(1)}\hat{J}_z^{(2)}$ であることを示せ。

(c) 状態 $|\Psi\rangle = |+\rangle|+\rangle$ について $\hat{\boldsymbol{J}}^2|\Psi\rangle$ と $\hat{J}_{\mathrm{z}}|\Psi\rangle$ を計算せよ。$|\Psi\rangle$ を $|\Phi_{J,M}\rangle$ の形に書いた場合の J と M は何か？

(d) 状態 $|\Psi_1\rangle = |+\rangle|0\rangle$ について $\hat{\boldsymbol{J}}^2|\Psi_1\rangle$ と $\hat{J}_{\mathrm{z}}|\Psi_1\rangle$ を計算せよ。状態 $|\Psi_2\rangle = |0\rangle|+\rangle$ について $\hat{\boldsymbol{J}}^2|\Psi_2\rangle$ と $\hat{J}_{\mathrm{z}}|\Psi_2\rangle$ を計算せよ。

(e) 上の結果を用いて $|\Psi_1\rangle$ と $|\Psi_2\rangle$ の線型結合によって同時固有状態 $|\Phi_{J,M}\rangle$ を作れ（もちろん、J, M を明記すること)。独立なものを複数作れるならばすべて求めること。

角運動量の固有状態についての以下の一般公式を証明なしで用いてよい。

$$\hat{J}_\pm|\psi_{j,m}\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,|\psi_{j,m\pm 1}\rangle \tag{1}$$

2. 摂動計算の問題。摂動の基本的な公式は導出なしで用いてよい。

1 次元の区間 $[0, L]$ での自由粒子のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) = E\,\varphi(x) \tag{2}$$

を考える。周期的境界条件 $\varphi(0) = \varphi(L)$, $\varphi'(0) = \varphi'(L)$ を課す。

この系の基底状態 $\varphi_0(x)$ と二重に縮退した第一励起状態 $\varphi_+(x)$, $\varphi_-(x)$ は、

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}, \quad \varphi_+(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{i2\pi x/L}, \quad \varphi_-(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{-i2\pi x/L} \tag{3}$$

で与えられる。

(a) 上の問題の基底エネルギーと第一励起状態のエネルギーを求めよ（これは極めて簡単な問題。シュレディンガー方程式を解く必要はない)。

v_0 を正の定数とし、

$$V(x) = \begin{cases} 4v_0 & 0 \le x \le L/4 \\ 0 & L/4 < x \le L \end{cases} \tag{4}$$

というポテンシャルを考える。

(b) 上のポテンシャル $V(x)$ が摂動として加わった際の基底状態と第一励起状態のエネルギーを摂動の一次までの範囲で求めよ。

$\langle \xi | \hat{V} | \psi \rangle = \int_0^L dx (\xi(x))^* V(x) \psi(x)$ だったことを思い出そう。複素共役に注意！

3. スピンの時間変化について考察しよう。$S = 1/2$ のスピン演算子の行列表示は、

$$\hat{S}_{\mathrm{x}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\mathrm{y}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\mathrm{z}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

である。

ω を正の定数として x 方向の磁場中のスピンについてのハミルトニアン

$$\hat{H} = -\omega \hat{S}_{\mathrm{x}} \tag{6}$$

を考える。また、

$$|{\rightarrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |{\leftarrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

により状態 $|{\rightarrow}\rangle$ と $|{\leftarrow}\rangle$ を定義する。

(a) 状態 $|{\rightarrow}\rangle$ と $|{\leftarrow}\rangle$ が $\hat{H}$ の固有状態であることを示し、それぞれについての固有値を求めよ。

(b) ハミルトニアン $\hat{H}$ についての時間発展のシュレディンガー方程式の解 $|\psi(t)\rangle$ で、初期条件 $|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たすものを求めよ。結果は縦ベクトルとして（なるべく簡単な形で）成分表示すること。

(c) 任意の時刻 t において、$|\psi(t)\rangle$ で $\hat{S}_{\mathrm{z}}$ を測定すると、どのような確率でどのような測定結果が得られるかを答えよ。

(d) 期待値 $\langle\psi(t)|\hat{S}_{\mathrm{x}}|\psi(t)\rangle$, $\langle\psi(t)|\hat{S}_{\mathrm{y}}|\psi(t)\rangle$, $\langle\psi(t)|\hat{S}_{\mathrm{z}}|\psi(t)\rangle$ を求めよ。その結果から、スピンがどのような運動をしているかを述べよ。