量子力学 III 試験問題　2022 年 1 月 19 日　田崎晴明

- 答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと。
- 問題は全部で 3 問ある。同じ解答用紙に異なった問題の答えを書かないように。
- 試験が終わったら、解答を適切な方法で電子ファイルにして、問題ごとに別のメールに添付し専用アドレスに送ること。メールの件名はそれぞれ `exam1`, `exam2`, `exam3` とする（数字はもちろん問題番号。この通りに書くこと）。メールの本文と解答用紙の**両方に**学籍番号と氏名を必ず書くこと。いわゆる白紙答案の場合には何も添付せずメール本文に「答案なし」と明記すること（白紙の大問が複数ある場合はそれぞれの問題についてメールを送るように）。
- 締め切りは 1 月 20 日の正午とする。なんらかの事故があったらすぐに連絡すること。
- 上記の指示を守っていなかったために ミスが生じて評価に影響があったとしてもそれは本人の責任なので原則として修正しない。

---

1. 大きさ 1 の角運動量を持った粒子を考える。角運動量の z 成分の固有状態を講義と同様に $|+\rangle, |0\rangle, |-\rangle$ と書く。

大きさ 1 の角運動量を持った粒子が二つある。それぞれの粒子の角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{J}}^{(1)}$, $\hat{\boldsymbol{J}}^{(2)}$ とし、全系の角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{J}}^{(1)} + \hat{\boldsymbol{J}}^{(2)}$ とする。$\hat{\boldsymbol{J}}^2$ の固有値を $J(J+1)\hbar^2$ と、($\hat{\boldsymbol{J}}$ の z 成分である) $\hat{J}_\mathrm{z}$ の固有値を $M\hbar$ と書き、対応する規格化された同時固有状態を $|\Phi_{J,M}\rangle$ とする。

(a) J のとりうる値を求めよ。また各々の J について、M の取りうる値を求めよ(結果だけでよい)。

(b) $\hat{\boldsymbol{J}}^2 = 4\hbar^2 + \hat{J}_+^{(1)}\hat{J}_-^{(2)} + \hat{J}_-^{(1)}\hat{J}_+^{(2)} + 2\hat{J}_\mathrm{z}^{(1)}\hat{J}_z^{(2)}$ であることを示せ。

(c) 状態 $|\Psi\rangle = |-\rangle|-\rangle$ について $\hat{\boldsymbol{J}}^2|\Psi\rangle$ と $\hat{J}_\mathrm{z}|\Psi\rangle$ を計算せよ。$|\Psi\rangle$ を $|\Phi_{J,M}\rangle$ の形に書いた場合の J と M の値を答えよ。

(d) 状態 $|\Psi_1\rangle = |+\rangle|-\rangle$ について $\hat{\boldsymbol{J}}^2|\Psi_1\rangle$ と $\hat{J}_\mathrm{z}|\Psi_1\rangle$ を計算せよ。状態 $|\Psi_2\rangle = |-\rangle|+\rangle$ について $\hat{\boldsymbol{J}}^2|\Psi_2\rangle$ と $\hat{J}_\mathrm{z}|\Psi_2\rangle$ を計算せよ。

(e) **上の結果を用いて** $|\Psi_1\rangle$ と $|\Psi_2\rangle$ の線型結合によって同時固有状態 $|\Phi_{J,M}\rangle$ を作れ(もちろん、J, M を明記すること)。独立なものを複数作れるならばすべて求めること。

角運動量の固有状態についての以下の一般公式を証明なしで用いてよい。

$$\hat{J}_\pm|\psi_{j,m}\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,|\psi_{j,m\pm 1}\rangle \tag{1}$$

2. 摂動計算の問題。摂動の基本的な公式は導出なしで用いてよい。

(x,y) をデカルト座標とし、$0 \le x \le L$, $0 \le y \le L$ で指定される $L \times L$ の正方形の領域での質量 m の粒子のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}\right)\varphi(x,y)+V(x,y)\,\varphi(x,y)=E\,\varphi(x,y) \tag{2}$$

を考える。正方形の境界上で $\varphi(x,y)=0$ という境界条件をとる。ポテンシャルは、v_0 を定数として

$$V(x,y)=\begin{cases} v_0, & 0\le x\le \frac{L}{2},\ 0\le y\le \frac{L}{2}; \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases} \tag{3}$$

である。状態 $|\psi_0\rangle$, $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ を

$$\psi_0(x,y)=\frac{2}{L}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}y\right) \tag{4}$$

$$\psi_1(x,y)=\frac{2}{L}\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{L}y\right),\quad \psi_2(x,y)=\frac{2}{L}\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}y\right) \tag{5}$$

と定める。

(a) 以下の定積分を示せ（示せなくてもこの結果を使ってよい)。

$$\int_0^{\pi/2} d\theta\,(\sin\theta)^2=\frac{\pi}{4},\quad \int_0^{\pi/2} d\theta\,(\sin 2\theta)^2=\frac{\pi}{4},\quad \int_0^{\pi/2} d\theta\,\sin\theta\,\sin 2\theta=\frac{2}{3} \tag{6}$$

(b) $|\psi_0\rangle$, $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$ は $v_0=0$ の場合のエネルギー固有状態であることを確かめ、それぞれのエネルギー固有値を求めよ（これは代入して確かめるだけの問題。**シュレディンガー方程式をゼロから解いても得点は与えません**)。第一励起エネルギーは縮退している。

定数 v_0 が正であるとしてポテンシャルの効果を 1 次摂動で近似的に取り入れよう。

(c) 基底エネルギーを求めよ。

(d) 第一励起エネルギーの縮退がどのように解けるかを計算し、それぞれのエネルギー固有値に対応するエネルギー固有状態を求めよ。

3. スピンの時間変化について考察しよう。$S = 1/2$ のスピン演算子の行列表示は、

$$\hat{S}_{\mathrm{x}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\mathrm{y}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\mathrm{z}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

である。

ω を正の定数として y 方向の磁場中のスピンについてのハミルトニアン

$$\hat{H} = \omega\,\hat{S}_{\mathrm{y}} \tag{8}$$

を考える。また、

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad |\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \tag{9}$$

により状態 $|\psi_+\rangle$ と $|\psi_-\rangle$ を定義する。

答案では、計算結果に現れる三角関数などをなるべく簡単な形にするよう工夫せよ。

(a) 状態 $|\psi_+\rangle$ と $|\psi_-\rangle$ が $\hat{H}$ の固有状態であることを示し、それぞれについての固有値を求めよ。

(b) ハミルトニアン $\hat{H}$ についての時間発展のシュレディンガー方程式の解 $|\psi(t)\rangle$ で、初期条件 $|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を満たすものを求めよ。結果は縦ベクトルとして成分表示すること。

(c) 期待値 $\langle\psi(t)|\hat{S}_{\mathrm{x}}|\psi(t)\rangle$, $\langle\psi(t)|\hat{S}_{\mathrm{y}}|\psi(t)\rangle$, $\langle\psi(t)|\hat{S}_{\mathrm{z}}|\psi(t)\rangle$ を求めよ。

(d) 任意の時刻 t において、$|\psi(t)\rangle$ で $\hat{S}_{\mathrm{x}}$ を測定すると、どのような確率でどのような測定結果が得られるかを答えよ。