試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	熱学・統計力学 2	2005 年 7 月 13 日	水	1	田崎

答えだけではなく、考え方の筋道を簡潔に書くこと。2006 年 3 月を過ぎたら、答案を予告なく処分することがある。

0. レポートの提出状況を書け。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. N とおりの状態 $i = 1, 2, \ldots, N$ をとる系がある。それぞれの状態のエネルギーを E_i とする。

この系のカノニカル分布を考え、分配関数を $Z(\beta)$ とする。逆温度 β において、エネルギー $\hat{E}$ の期待値が、

$$\langle \hat{E} \rangle_\beta = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z(\beta) \tag{1}$$

で与えられ、ゆらぎが、

$$\mathcal{F}[\hat{E}] = \sqrt{\langle (\hat{E})^2 \rangle_\beta - (\langle \hat{E} \rangle_\beta)^2} = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \log Z(\beta) \tag{2}$$

で与えられることを示せ。

これらの結果を使い、熱容量

$$C = \frac{d}{dT} \langle \hat{E} \rangle_\beta \tag{3}$$

が、エネルギーのゆらぎと

$$C = \frac{1}{kT^2} \mathcal{F}[\hat{E}] \tag{4}$$

という関係で結ばれることを示せ。

2. ポテンシャル $V(x, y, z)$ からの力を受ける質量 m の粒子 N 個からなる理想気体が逆温度 β の平衡にあるとする。この系を記述する分配関数は、x, y, z を三次元のデカルト座標として、

$$Z(\beta) = \frac{1}{N!} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2 \beta} \right)^{3N/2} \left\{ \int dx\, dy\, dz\, e^{-\beta V(x,y,z)} \right\}^N \tag{5}$$

と表される。

今、ポテンシャルは、α を正の定数として

$$V(x, y, z) = \frac{\alpha}{2} z^2 \tag{6}$$

だとする。また、(5) での積分範囲は $0 \le x \le L, 0 \le y \le L, 0 \le z$ とする。

(a) 分配関数 $Z(\beta)$ を求め、自由エネルギー $F(\beta)$ を求めよ。

(b) この系の熱容量（全エネルギーの期待値を温度で微分したもの）を求めよ。

ガウス積分の公式

$$\int_0^\infty dx \exp[-x^2/2] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{7}$$

を使ってよい（そのままは使えないので、変数変換をちゃんと考えること）。

3. 二つのスピンからなる系を考え、各々のスピン変数を σ_1, σ_2 とする。これらは、それぞれ $\sigma_1 = \pm 1$, $\sigma_2 = \pm 1$ という値をとる。

この系が外部磁場 H のもとにあるときのエネルギーを、

$$E(\sigma_1, \sigma_2) = J \sigma_1 \sigma_2 - \mu_1 H \sigma_1 + -\mu_2 H \sigma_2 \tag{8}$$

とする。$J > 0$ は二つのスピンを逆に向けようとする相互作用の強さ、$\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ は、それぞれのスピンの磁気モーメントである（μ_1 と μ_2 がかならずしも等しくないところだけがレポート問題とのちがい）。

(a) 系がとりうる（ミクロな）状態を列挙し、そのエネルギーを求めよ。それをもとに分配関数を求めよ。

(b) 逆温度 β での磁化 $\hat{m} = (\mu_1 \hat{\sigma}_1 + \mu_2 \hat{\sigma}_2)/2$ の期待値を求めよ。

(c) 磁場が 0 のときの磁化率

$$\chi(\beta) = \left. \frac{\partial}{\partial H} \langle \hat{m} \rangle_\beta \right|_{H=0} \tag{9}$$

を求めよ。高温の極限では、

$$\chi(\beta) \simeq \frac{(\mu_1)^2 + (\mu_2)^2}{2} \beta \tag{10}$$

となり、キュリー則が成り立つことを示せ。また、低温の極限での $\chi(\beta)$ のふるまいを、μ_1, μ_2 が等しい場合と異なる場合に分けて、議論せよ。

この話は、二つずつがペアで相互作用する $2N$ 個のスピン系に拡張しなくては、物理的に意味がない。どこをどうかえればいいか、家に帰って考えてください。