

| 試験問題 |           | 試験日        | 曜日 | 時限 | 担当者 |
|------|-----------|------------|----|----|-----|
| 科目名  | 熱学・統計力学 2 | 2008年7月30日 | 水  | 1  | 田崎  |

答えだけではなく、考え方の筋道を簡潔に書くこと。解答の順番は(0番以外)自由。解答用紙の裏面も使用してよい。2009年3月を過ぎたら、答案を予告なく処分することがある。

**0.** これは、冒頭に書くこと。レポートの提出状況を書け。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日的答案にはさんで提出すること。

**1.** ヘルムホルツの自由エネルギー  $F(T)$  が温度  $T$  について上に凸であることをカノニカル分布による表現を用いて一般的に示そう。

分配関数を  $Z(\beta)$  とし、 $\log Z(\beta)$  の温度  $T$  による一回微分と二回微分の表式を求めよ。結果をエネルギーの期待値  $\langle \hat{H} \rangle_\beta$  とエネルギーの二乗の期待値  $\langle \hat{H}^2 \rangle_\beta$  を使って表せ。その結果を用いて、 $F(T)$  の  $T$  による二回微分が0以下であることを示せ。

**2.** 三つずつのスピンの組になって相互作用し合っている系を考える。スピンの総数  $N$  は3の倍数とする。エネルギー固有状態は、スピン変数  $\sigma_i = \pm 1$  を集めた組  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$  で指定される。エネルギー固有状態  $\sigma$  のエネルギー固有値を

$$E_\sigma = -J \sum_{i=1}^{N/3} \{ \sigma_{3i-2} \sigma_{3i-1} + \sigma_{3i-1} \sigma_{3i} \} \quad (1)$$

とする。 $J > 0$  は、交換相互作用定数である。

この系の逆温度  $\beta$  での平衡状態を調べたい。

- まず、スピン三つの系について、エネルギー固有値と対応するエネルギー固有状態を求めよ。
- この結果をもとに全系の分配関数を求めよ。
- 全系のエネルギーの期待値を求めよ。
- 全系のエントロピーの表式を求め、絶対零度の極限でのエントロピーの値を求めよ。

3. 一般に、ポテンシャル  $V(\mathbf{r})$  中の質量  $m$  の粒子  $N$  個からなる理想気体の分配関数は、

$$Z(\beta) = \frac{1}{N!} \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{3N/2} \left\{ \int d^3\mathbf{r} e^{-\beta V(\mathbf{r})} \right\}^N \quad (2)$$

である。

$x, y, z$  を三次元のデカルト座標とし、 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq R, 0 \leq z \leq L$  で指定される円筒状の領域に閉じこめられた、質量  $m$  の粒子  $N$  個からなる理想気体を考える。粒子には、 $a$  を正の定数として、

$$V(x, y, z) = -a\sqrt{x^2 + y^2} \quad (3)$$

というポテンシャルで表される外力が働いている（あまり現実的ではない）。

この系が逆温度  $\beta$  の平衡状態にある。

- (a) 円筒の中心 ( $x = y = 0$ ) と円筒の端 ( $\sqrt{x^2 + y^2} = R$ ) での気体の密度はどちらが大きい？ また、両者の比を求めよ。
- (b) 分配関数  $Z(\beta)$  を求めよ。
- (c) 全系のエネルギーの期待値を求めよ。
- (d)  $\beta a R \gg 1$  と  $\beta a R \ll 1$  のとき、それぞれ、全系のエネルギーの期待値はどうなるか？

定積分

$$\int_0^R dr r e^{br} = \frac{1 + (bR - 1)e^{bR}}{b^2} \quad (4)$$

を（できるだけ導いてから）用いよ。