

試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	熱学・統計力学 2	2009年7月22日	水	1	田崎

答えだけではなく、考え方の筋道を簡潔に書くこと。解答の順番は(0番以外)自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2010年3月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

**0.** これは冒頭に書くこと。レポートの提出状況を書け(冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす)。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

**1.** エネルギー固有状態が  $i = 1, 2, \dots$  と指定でき、対応するエネルギー固有値が  $E_i$  であるような、一般のマクロな量子系を考える。

この系の温度  $T$  における平衡状態をカノニカル分布であつかう。Helmholtz の自由エネルギー  $F$  が

$$-\frac{\partial}{\partial T} F = \frac{\langle \hat{H} \rangle - F}{T} \quad (1)$$

という関係を満たすことを証明せよ(これがエントロピーに等しい)。 $\langle \hat{H} \rangle$  はエネルギーの期待値である。

**2.** 「大きさ1のスピンの」  $N$  個が集まった系を考える。系のエネルギー固有状態は、スピン変数の組  $(S_1, S_2, \dots, S_N)$  で指定される。ここで、各々のスピン変数は  $S_j = -1, 0, 1$  と三通りの値をとる(ここだけが、講義でやった例題と違うところ)。

エネルギー固有状態  $(S_1, S_2, \dots, S_N)$  に対応するエネルギーは、

$$E_{(S_1, S_2, \dots, S_N)} = \sum_{j=1}^N \{D(S_j)^2 - \mu_0 H S_j\} \quad (2)$$

とする。ここで、 $D$  は(物質固有の)ゼロでない定数、 $\mu_0$  は正の定数で、 $H$  は外部磁場を表わす。

この系の逆温度  $\beta$  での平衡状態を調べたい。

(a) スピン一つ ( $N = 1$ ) の系について、エネルギー固有値と対応するエネルギー固有状態を求めよ。

(b) この結果をもとに全系の分配関数を求めよ。

- (c) スピン一つあたりの磁化  $N^{-1}\mu_0 \sum_{j=1}^N \hat{S}_j$  の期待値  $m(\beta, H)$  を求めよ ( $\hat{S}_j$  は  $S_j$  に対応する物理量)。
- (d) ゼロ磁場での磁化率  $\chi(\beta) = \partial m(\beta, H)/\partial H|_{H=0}$  を求めよ。十分に高温と十分に低温での  $\chi(\beta)$  のふるまいを議論せよ。低温でのふるまいについては、 $D$  が正の場合と負の場合を区別すること。

**3.**  $x, y, z$  を三次元のデカルト座標とする。調和型のポテンシャル

$$V(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2) \quad (3)$$

( $a > 0$  は定数) に質量  $m$  の (古典的な) 粒子  $N$  個がとらえられている ( $x, y, z$  は三次元空間全体を動くとしてよい)。粒子間の相互作用は無視できるとする。

この系が逆温度  $\beta$  の平衡状態にある。

- (a) 分配関数  $Z(\beta)$  を求めよ。
- (b) 全系のエネルギーの期待値と熱容量を求めよ。
- (c) 任意の位置における (平衡状態での) 粒子の密度  $\rho(x, y, z)$  を求めよ。密度は全空間で積分したら  $N$  になるように規格化すること。

一般に、ポテンシャル  $V(\mathbf{r})$  中の質量  $m$  の粒子  $N$  個からなる理想気体の分配関数は、

$$Z(\beta) = \frac{1}{N!} \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{3N/2} \left\{ \int d^3\mathbf{r} e^{-\beta V(\mathbf{r})} \right\}^N \quad (4)$$

である。

また、ガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-s^2} = \sqrt{\pi} \quad (5)$$

を用いてよい。