試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	熱学・統計力学３	2006年1月25日	水	1	田崎

以下の問題から二問選択して解答せよ。答えだけでなく、考え方の筋道を簡潔に書くこと。試験日から一年たったら答案を予告なく廃棄することがある。

1. 長さが L の 1 次元的な領域に閉じ込められた質量 m の点粒子の量子力学を考える。粒子には外力は働かないとする。この領域の座標を x $(0 \le x \le L)$ と表す。

(a) ひとつの粒子の定常状態（エネルギーの固有状態）を表す波動関数 $\varphi(x)$ の満たす Schrödinger 方程式を書け。

(b) 上の方程式を解き、互いに独立な定常状態の波動関数（規格化しなくてもよい）と、対応する固有エネルギーを全て求めよ。

ただし波動関数に対する境界条件は、$\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ とする。

同じ領域に N 個の質量 m の同種粒子がある場合を、量子力学的に扱う。粒子には外力は働かず、粒子間の相互作用もないとする。

(c) 粒子がボゾンの場合に、基底状態のエネルギーと第一励起状態のエネルギーを求めよ。(個々の粒子のエネルギーではなく、全系のエネルギー。)

(d) 粒子がフェルミオンの場合に、基底状態のエネルギーと第一励起状態のエネルギーを求めよ。この場合のフェルミエネルギーを求めよ。

上のような自由粒子の系が、逆温度 β、化学ポテンシャル μ を持つ大きな系と接して平衡にある場合を考察する。

(e) 粒子がボゾンである場合、フェルミオンである場合それぞれについて、系の全エネルギーを表す式を書け。

和や積分を具体的に評価する必要はない。また、ボーズおよびフェルミ分布関数を導く必要はない。

2. 講義でみたように、黒体輻射の問題を、光子（化学ポテンシャル $\mu = 0$ をもつボソン）の理想気体とみなして解析することができる。この考えを用いて、体積 V の系で、圧力 p と全エネルギー U のあいだに

$$p = \frac{U}{3V} \tag{1}$$

の関係が成り立つことを示そう。

念のため復習しておくと、各々の波数ベクトル $\mathbf{k}$ に対してエネルギー $\hbar c|\mathbf{k}|$ の光子が二種類ずつ対応している。また、波数ベクトルについての和は、

$$\sum_{\mathbf{k}}(\cdots) \;\to\; \frac{V}{(2\pi)^3}\int_{(\text{全空間})} d^3\mathbf{k}\,(\cdots) \tag{2}$$

と書き直せる。

さて、定義にしたがえば、光子の理想気体の大分配関数は、

$$\Xi(\beta) = \prod_{\mathbf{k}}\left(\sum_{n_{\mathbf{k}}=0}^{\infty}\exp[-\beta\hbar c|\mathbf{k}|\,n_{\mathbf{k}}]\right)^2 \tag{3}$$

と書ける。二つの偏向状態についての積を取り入れるため、和を二乗した。分配関数がわかれば、圧力は、

$$p = \frac{\log\Xi(\beta)}{\beta V} \tag{4}$$

により求められる。また、系の全エネルギーは、

$$U = 2\sum_{\mathbf{k}}\hbar c|\mathbf{k}|\;\langle n_{\mathbf{k}}\rangle_{\beta,0} \tag{5}$$

である。

(a) 大分配関数 (3) の和を正確に評価せよ。

(b) その結果を圧力 (4) に代入し、$\mathbf{k}$ についての和を積分に直せ。さらに、回転対称性を利用して積分変数を $k=|\mathbf{k}|$ に直せ。

(c) エネルギー (5) も、$k=|\mathbf{k}|$ の積分で表せ。

(d) これらの結果から、求める (1) の関係を示せ。

試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	熱学・統計力学３	2006 年 1 月 25 日	水	1	田崎

3. 講義で見たように、量子理想気体が高温低密度にあるということは、$\exp[-\beta(\varepsilon-\mu)] \ll 1$ という条件であらわされる。講義では最低次の近似だけをみたが、ここでは、もう一つ先の補正まで求めることにしよう（去年の問題に少し無理があったので、簡単にした）。

まず、フェルミあるいはボース分布関数が、

$$f(\varepsilon) \simeq \exp[-\beta(\varepsilon-\mu)] \mp \exp[-2\beta(\varepsilon-\mu)] \tag{6}$$

と近似できることを示せ。これを利用し、一粒子の状態密度が体積 V と定数 $\alpha > 0$ によって

$$D(\varepsilon) = \frac{V}{\alpha} \tag{7}$$

と書ける場合に、粒子数（の期待値）N を β, μ の関数として求めよ。それを使って、化学ポテンシャル μ を密度 $\rho = N/V$ と逆温度 β の関数として求めよ。ただし、高温低密度の展開の最低次では $e^{\beta\mu} \simeq \alpha\beta\rho$ となることに注意せよ。

4. 一次元格子の格子点を $i = 1, 2, \ldots, N$ とし、各々の格子点の上にスピン $\sigma_i = \pm 1$ がのっているとする。磁場がなく**自由境界条件**の場合のエネルギーは、交換相互作用定数を $J > 0$ として、

$$E(\sigma_1, \ldots, \sigma_N) = -J \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i \, \sigma_{i+1} \tag{8}$$

である（講義であつかった周期境界の場合とは端の相互作用が違うことに注意）。この系の分配関数は、

$$Z_N(\beta) = \sum_{\sigma_1=\pm1} \sum_{\sigma_2=\pm1} \cdots \sum_{\sigma_N=\pm1} \exp[-\beta \, E(\sigma_1, \ldots, \sigma_N)] \tag{9}$$

である。

(a) 境界条件に注意しつつ $Z_2(\beta)$ を求めよ。

(b) $Z_3(\beta)$ の定義式で、σ_3 についての和だけを実行せよ。このとき σ_2 は ± 1 しかとらないことに注意せよ。

(c) $N \geq 3$ に関して、$Z_N(\beta)$ を $Z_{N-1}(\beta)$ で表す関係がある。それを求めよ。

(d) $Z_N(\beta)$ を求めよ。

5. 3 次元の立方格子上の通常の Ising 模型を考える。磁場はないとして、スピン系のエネルギーを

$$E[(\sigma_i)] = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j \tag{10}$$

とする。$J > 0$ は定数であり、各々のスピン変数は ± 1 の二つの値をとる。和はとなり合う格子点の組すべてについてとる。この系が逆温度 β の平衡状態にある。

講義で述べた平均場近似の次のような改良を考えよう。格子のなかから、となり合う格子点を**二つ**勝手に選んで、仮に、0 と 1 と呼ぶことにする。これら二つのスピンを「生きた」スピンとしてあつかい、それらの周りのスピンのゆらぎを無視しよう。

(a) σ_0 と σ_1 に関わるエネルギー $E_0(\sigma_0, \sigma_1)$ はどうなるか。

上記のエネルギーで $i = 0, 1$ 以外について σ_i を平均場 m に置き換える。

(b) 二つの格子点における磁化 $\langle (\sigma_0 + \sigma_1)/2 \rangle$ を β, J, m の関数として求めよ。

(c) 0, 1 は特別ではないと「開き直り」、 m を決定するための self-consistent equation を書き下せ。

(d) self-consistent equation を $m = f(m)$ と書くと、相転移点は $f'(0) = 1$ という条件で決まる。このことから、相転移点 β_{c} の満たす方程式を書け。

6. 一粒子の状態密度が、定数 $D > 0$ と $g > 0$ によって

$$D(\varepsilon) = D\{\delta(\varepsilon) + \delta(\varepsilon - g)\} \tag{11}$$

と表されるようなフェルミオンの理想気体がある。(g はエネルギーギャップと呼ばれる。)粒子数 N_0 は、ちょうど D に等しくとる。この系が、熱浴(かつ粒子浴)と平衡にある。

(a) 化学ポテンシャルを $\mu = g/2$ と選べば、任意の β について、上の粒子数が得られることを示せ。

(b) 系の全エネルギーの期待値を求め、その温度依存性を示すグラフを描け。また、この系の比熱を求めよ。