試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	熱学・統計力学３	2007 年 1 月 31 日	水	1	田崎

以下の問題から二問選択して解答せよ。答案用紙一枚目の上部の余白に何番を選択したかをはっきりと書け。

答えだけでなく、考え方の筋道を簡潔に書くこと。試験日から一年たったら答案を予告なく廃棄することがある。

1.　長さが L の 1 次元的な領域に閉じ込められた質量 m の点粒子の量子力学を考える。粒子には外力は働かないとする。この領域の座標を x $(0 \le x \le L)$ と表す。

(a) ひとつの粒子の定常状態（エネルギーの固有状態）を表す波動関数 $\varphi(x)$ の満たす Schrödinger 方程式を書け。

(b) 上の方程式を解き、互いに独立な定常状態の波動関数（規格化しなくてもよい）と、対応する固有エネルギーを全て求めよ。

ただし波動関数に対する境界条件は、$\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ とする。

同じ領域に N 個の質量 m の同種粒子がある場合を、量子力学的に扱う。粒子には外力は働かず、粒子間の相互作用もないとする。

(c) 粒子がボゾンの場合に、基底状態のエネルギーと第一励起状態のエネルギーを求めよ。(個々の粒子のエネルギーではなく、全系のエネルギー。)

(d) 粒子がフェルミオンの場合に、基底状態のエネルギーと第一励起状態のエネルギーを求めよ。この場合のフェルミエネルギーを求めよ。

上のような自由粒子の系が、逆温度 β、化学ポテンシャル μ を持つ大きな系と接して平衡にある場合を考察する。

(e) 粒子がボゾンである場合、フェルミオンである場合それぞれについて、系の全エネルギーを表す式を書け。

和や積分を具体的に評価する必要はない。また、ボーズおよびフェルミ分布関数を導く必要はない。

2.　イジング模型で、逆温度を臨界点に固定し、磁場 h を小さくしていくときにも、臨界現象がみられる。たとえば、磁化は

$$m(\beta_{\mathrm{c}}, h) \approx h^{1/\hat{\delta}} \tag{1}$$

のように、h に特異な依存性を示して 0 に近づく。平均場近似を用いて、この臨界現象を議論し、臨界指数 $\hat{\delta}$ を求めてみよう。

講義と同様、もっとも標準的なイジング模型を考える。つまり、d 次元立方格子の各々の格子点 i にスピン変数 $\sigma_i = \pm 1$ がのっており、スピン配位 $(\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$ に対応するエネルギーは、

$$E_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_N)} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - \mu_0 \, H \sum_{i=1}^{N} \sigma_i \tag{2}$$

である。

(a) 講義と同様にして、この系の平均場近似をおこない、自己整合方程式を作れ。

(b) $\beta = 1/(2dJ)$ の転移点上で、磁場 H が 0 でないが小さいときの自己整合方程式の解を求め、臨界指数 $\hat{\delta}$ を求めよ。テイラー展開 $\tanh(x) \simeq x - x^3/3$ が役に立つ。

3. 講義で見たように、量子理想気体が高温低密度にあるということは、$\exp[-\beta(\varepsilon - \mu)] \ll 1$ という条件であらわされる。講義では最低次の近似だけをみたが、ここでは、もう一つ先の補正まで求めることにしよう。

まず、フェルミあるいはボース分布関数が、

$$f(\varepsilon) \simeq \exp[-\beta(\varepsilon - \mu)] \mp \exp[-2\beta(\varepsilon - \mu)] \tag{3}$$

と近似できることを示せ。これを利用し、一粒子の状態密度が体積 V と定数 $\alpha > 0$ によって

$$D(\varepsilon) = \frac{V}{\alpha} \tag{4}$$

と書ける場合に、粒子数（の期待値）N を β, μ の関数として求めよ。それを使って、化学ポテンシャル μ を密度 $\rho = N/V$ と逆温度 β の関数として求めよ。ただし、高温低密度の展開の最低次では $e^{\beta\mu} \simeq \alpha\beta\rho$ となることに注意せよ。

試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	熱学・統計力学３	2007年1月31日	水	1	田崎

4. ある量子フェルミ気体の一粒子状態密度を $D(\epsilon) = V\,\nu(\epsilon)$ とする。定数 $\epsilon_0 > 0$ があり、$\epsilon < 0$ あるいは $\epsilon > 2\epsilon_0$ では $\nu(\epsilon) = 0$ であり、また、任意の ϵ について $\nu(\epsilon) = \nu(2\epsilon_0 - \epsilon)$ が成り立つとする。この系で可能な最大の密度は、$\rho_{\max} = \int_0^{2\epsilon_0} d\epsilon\,\nu(\epsilon)$ である。ここでは、密度が $\rho = \rho_{\max}/2$ の場合を考える。

(a) 化学ポテンシャルを $\mu = \epsilon_0$ と選べば、任意の β において、上の密度が実現されることを示せ。

簡単な例として、

$$\nu(\epsilon) = \frac{\rho_{\max}}{2}\,\{\delta(\epsilon - \frac{\epsilon_0}{4}) + \delta(\epsilon - \frac{3\epsilon_0}{4})\} \tag{5}$$

という場合を考える。

(b) この系の平衡状態での、エネルギー密度と単位体積あたりの比熱を求めよ。

5. この問題では、二次元の理想 Bose 気体は Bose-Einstein 凝縮をおこさないことを示す。

一粒子の状態密度が、定数 $A > 0$ によって

$$D(\epsilon) = \begin{cases} 0, & \epsilon < 0 \\ A\,V, & \epsilon \geq 0 \end{cases} \tag{6}$$

と表されるボゾンの理想気体がある。系の体積は V、全粒子数は N_0 であり、系は逆温度 β の熱浴と平衡にある。以下の解答では、粒子密度 $\rho_0 = N_0/V$ を用いて色々な量を表すことが望ましい。

(a) 粒子数 N_0 を積分で表す式を書き下し、そこから μ を求めよ。（講義で調べた 3 次元の場合と違って、任意の β と ρ_0 についてこの方法で μ を求めることができる。）

(b) 最低エネルギーの一粒子状態は縮退しておらず、固有エネルギー $\varepsilon = 0$ を持つとする。この一粒子状態に入っている粒子の個数の期待値 $\langle n_0 \rangle_\beta$ を求めよ。（任意の β について、これは 1 のオーダーの量になり、ボーズ・アインシュタイン凝縮がおきないことがわかる。）

$c>1$ のとき成り立つ定積分の公式

$$\int_0^\infty \frac{dx}{ce^x-1} = \log\left(\frac{c}{c-1}\right) \tag{7}$$

を証明抜きで用いてよい。

6. スピン 1 の 1 次元強磁性 Ising 模型を扱おう。スピン 1 の系では、各々のスピン変数は $1, 0, -1$ という三つの値をとることができる（その理由は、角運動量の量子力学を学べばわかるが、ここでは気にしなくてもいい）。格子点 $i(=1,2,\ldots,N)$ の上にのっているスピンのスピン変数を S_i とする。よって、 $S_i = 1, 0, -1$ である。

系のエネルギー固有状態は、これらのスピンを $(S_1,\ldots,S_N)$ のように一列に並べて指定できる。系のエネルギーは、定数 $J>0$ を用いて、

$$E_{(S_1,\ldots,S_N)} = -J\sum_{i=1}^{N} S_i S_{i+1} \tag{8}$$

と書ける。周期的境界条件 $S_{N+1}=S_1$ を仮定する。この系が逆温度 β の熱浴と平衡に達している。

講義で扱った行列の方法を用いて、$N\to\infty$ の極限でのスピン一つあたりの自由エネルギー $f(\beta)$ を求めよ。ただし、$a>0,\, b>0$ のとき、

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & a \end{pmatrix} \tag{9}$$

という形の行列の三つの固有値のうち最大のものは、

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{2}\left(1+a+b+\sqrt{9-2(a+b)+(a+b)^2}\right) \tag{10}$$

であることを証明抜きで用いてよい。