補題 2 とその証明 (3009/5/31)

ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_\Omega \end{pmatrix}$ に対して $\|\boldsymbol{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{\Omega} |v_i|$ とする。また $T_{i,j}$ の最小値を $\mu > 0$ とする。任意の i, j について、$T_{i,j} \geq \mu$ である。

補題 2: $\boldsymbol{q}$ を $\sum_{i=1}^{\Omega} q_i = 0$ を満たす任意のベクトルとする。このとき、

$$\|\mathsf{T}\,\boldsymbol{q}\|_1 \leq (1 - \Omega\mu)\,\|\boldsymbol{q}\|_1 \tag{1}$$

が成り立つ。

証明：$\boldsymbol{q}$ を固定し、$I_- \cup I_+ = \{1, 2, \ldots, \Omega\}$ と $I_- \cap I_+ = \emptyset$ を満たす集合 I_-, I_+ を、$j \in I_-$ ならば $q_j \leq 0$ であり、$j \in I_+$ ならば $q_j \geq 0$ であるように決める。このとき、$\sum_{j \in I_-} |q_j| = \sum_{j \in I_+} |q_j| = \|\boldsymbol{q}\|_1 / 2$ が成り立つ。すると、

$$\begin{aligned}(\mathsf{T}\boldsymbol{q})_i &= \sum_{j=1}^{\Omega} T_{i,j} q_j = \sum_{j \in I_+} T_{i,j}|q_j| - \sum_{j \in I_-} T_{i,j}|q_j| = \sum_{j=1}^{\Omega} T_{i,j}|q_j| - 2\sum_{j \in I_-} T_{i,j}|q_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\Omega} T_{i,j}|q_j| - 2\sum_{j \in I_-} \mu\,|q_j| = \sum_{j=1}^{\Omega} T_{i,j}|q_j| - \mu\,\|\boldsymbol{q}\|_1\end{aligned} \tag{2}$$

が成り立つ。I_- と I_+ の役割を入れ替えて同じ評価をすることで、

$$|(\mathsf{T}\boldsymbol{q})_i| \leq \sum_{j=1}^{\Omega} T_{i,j}|q_j| - \mu\,\|\boldsymbol{q}\|_1 \tag{3}$$

が得られる。ここで $\sum_{i=1}^{\Omega} T_{i,j} = 1$ に注意して、これを i について足しあげれば、

$$\|\mathsf{T}\boldsymbol{q}\|_1 \leq \|\boldsymbol{q}\|_1 - \Omega\mu\,\|\boldsymbol{q}\|_1 = (1 - \Omega\mu)\,\|\boldsymbol{q}\|_1 \tag{4}$$

を得る。 ∎