遷移行列の固有ベクトルについて (2009/6/29)

定理：n を 2 以上の整数とする。$n\times n$ 行列 $\mathsf{R}=(R_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ が以下の (i), (ii), (iii) を満たすとする。(i) 任意の異なる i,j について $R_{i,j}\geq 0$ である。(ii) 任意の j について $\sum_{i=1}^{n}R_{i,j}=0$ が成り立つ。(iii) 連結性（省略)。すると、$\mathsf{R}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ を満たすゼロでないベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在する。このようなベクトルは定数倍を除いて一意的に決まり、また、全ての成分が正になるように選ぶことができる。

これはペロン・フロベニウスの定理の帰結だが、遷移行列の特殊性を使えば初等的に証明できる。以下の証明は受講生の S さんによる。

行列の次元 n についての帰納法を用いる。

$n=2$ の場合は R の一般形を書いて具体的に計算するだけで、定理の命題が示される（やってみてください)。

$n=k-1$ のときに定理の命題が成り立つと仮定する。これから $n=k$ のときの命題を示す。

$\mathsf{R}=(R_{i,j})_{i,j=1,\ldots,k}$ を、(i), (ii), (iii) を満たす $k\times k$ 行列とする。連結性から、任意の i を固定したとき、少なくとも一つの（i とは異なる）j について $R_{i,j}>0$ が成り立つ。これと (ii) より、$R_{i,i}<0$ がいえることに注意する。

任意の $i,j=1,\ldots,k-1$ に対して

$$\tilde{R}_{i,j}=R_{i,j}-\frac{R_{i,k}R_{k,j}}{R_{k,k}}\tag{1}$$

とする（$R_{k,k}<0$ なので、この定義に問題はない)。こうして定義された $(k-1)\times(k-1)$ 行列 $\tilde{\mathsf{R}}$ が (i), (ii), (iii) を満たすことをいおう。

まず (i)。任意の異なる $i,j=1,\ldots,k-1$ をとる。R が (i) を満たすから、$R_{i,j}\geq 0$, $R_{i,k}\geq 0$, $R_{k,j}\geq 0$ である。$R_{k,k}<0$ なので (1) より $\tilde{R}_{i,j}\geq 0$ がいえる。

次に (ii)。ともかく一つ目の成分で足しあげてみると、

$$\sum_{i=1}^{k-1}\tilde{R}_{i,j}=\left(\sum_{i=1}^{k-1}R_{i,j}\right)-\frac{\left(\sum_{i=1}^{k-1}R_{i,k}\right)R_{k,j}}{R_{k,k}}=(-R_{k,j})-\frac{(-R_{k,k})\,R_{k,j}}{R_{k,k}}=0\tag{2}$$

となる。二箇所で R についての (ii) を使った。

最後に (iii)。これはアイディアだけ述べよう。任意の異なる $i,j=1,\ldots,n-1$ をとる。R が (iii) を満たすので、i と j は R のゼロでない成分を介してつながっている。もし i と j をつなぐ（R の）道が k を通らないなら、(1) より明らかに、i と j は（同じ道を使って）$\tilde{\mathsf{R}}$ のゼロでな

い成分を介してつながっている。i と j をつなぐ（R の）道が k を通るとしよう。具体的には、道の途中に $(j',k),(k,i')$ という部分が（一般には複数回）あるとする。これは $R_{i',k}R_{k,j'}>0$ ということだから、(1) より $\tilde{R}_{i',j'}>0$ がいえる。これによって、i と j が $\tilde{\mathsf{R}}$ のゼロでない成分を介してつながっていることが分かる。

$\tilde{\mathsf{R}}$ が (i), (ii), (iii) を満たすことが言えたので、帰納法の仮定により、$\tilde{\mathsf{R}}\tilde{\boldsymbol{v}}=\mathbf{0}$ を満たし、成分が全て正のベクトル $\tilde{\boldsymbol{v}}=(\tilde{v}_i)_{i=1,\ldots,k-1}$ が存在する。$\tilde{\mathsf{R}}\tilde{\boldsymbol{v}}=\mathbf{0}$ を成分で書き、(1) を代入すると、$i=1,\ldots,k-1$ について、

$$\sum_{j=1}^{k-1}R_{i,j}\tilde{v}_j-\frac{R_{i,k}}{R_{k,k}}\sum_{j=1}^{k-1}R_{k,j}\tilde{v}_j=0 \tag{3}$$

となる。k 次元のベクトル $\boldsymbol{v}=(v_i)_{i=1,\ldots,k}$ を、$i=1,\ldots,k-1$ については $v_i=\tilde{v}_i$、および

$$v_k=-\frac{1}{R_{k,k}}\sum_{j=1}^{k-1}R_{k,j}\tilde{v}_j \tag{4}$$

により定義する。すべての $j=1,\ldots,k-1$ について $\tilde{v}_j>0$ であり、連結性から少なくとも一つの $j=1,\ldots,k-1$ について $R_{k,j}>0$ だから、$v_k>0$ である。つまり $\boldsymbol{v}$ の成分は全て正である。(3) を $\boldsymbol{v}$ を使って書き直すと、$i=1,\ldots,k-1$ について

$$\sum_{j=1}^{k}R_{i,j}v_j=0 \tag{5}$$

となる。$i=k$ の場合は、定義 (4) を使って別個に計算すると

$$\sum_{j=1}^{k}R_{k,j}v_j=\sum_{j=1}^{k-1}R_{k,j}v_j+R_{k,k}v_k=\sum_{j=1}^{k-1}R_{k,j}\tilde{v}_j-R_{k,k}\frac{1}{R_{k,k}}\sum_{j=1}^{k-1}R_{k,j}\tilde{v}_j=0 \tag{6}$$

となる。(5), (6) をあわせれば $\mathsf{R}\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ であり、命題にいう全ての成分が正のベクトルが得られた。

最後に一意性をいう（疲れてきて、ちょっと省略気味なので、自分であいだを埋めてください）。上で作った $\boldsymbol{v}$ の定数倍ではない $\boldsymbol{v}'$ があって、$\mathsf{R}\boldsymbol{v}'=\mathbf{0}$ を満たすとする。$\boldsymbol{v}'$ から第 k 成分を除いて作られる $k-1$ 次元ベクトルを $\tilde{\boldsymbol{v}}'$ とする。上の計算を逆にたどることで、$\tilde{\mathsf{R}}\tilde{\boldsymbol{v}}'=\mathbf{0}$ がいえる。ここで、$\tilde{\boldsymbol{v}}'=\mathbf{0}$ とすると、$\boldsymbol{v}'$ の定義に矛盾する[1]ので、$\tilde{\boldsymbol{v}}'\neq\mathbf{0}$ である。よって $n=k-1$ についての定理の命題から、$\tilde{\boldsymbol{v}}'=\mathbf{0}$ は $\tilde{\boldsymbol{v}}$ の定数倍でなくてはならない。ここから、$\boldsymbol{v}'$ が $\boldsymbol{v}$ の定数倍であることがいえる。

[1] ここで連結性を使う。