$\psi(t)$ のふるまい (2009/7/11)

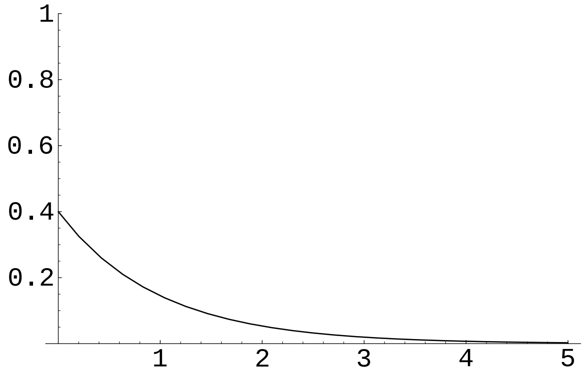
明後日の講義に出てくる微分方程式

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = \alpha\left\{\left(e^{\kappa\,\psi(t)} - e^{\kappa\,\psi(t)}\right) - \psi(t)\left(e^{\kappa\,\psi(t)} + e^{\kappa\,\psi(t)}\right)\right\} \tag{1}$$

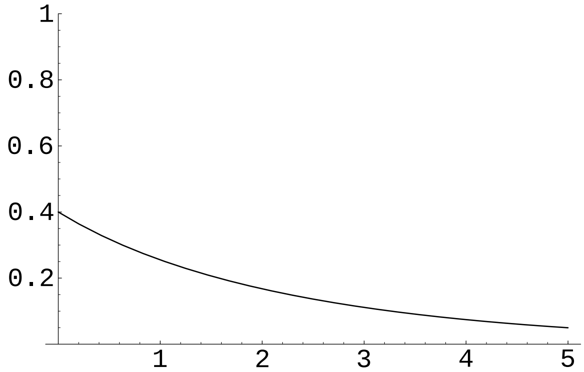
を数値的に解いてみた。

以下では $\alpha = 1$ とする（これは時間スケールを決める[1]だけなので本質的ではない)。初期条件は（何でもよいのだが）$\psi(0) = 0.4$ とした。かなり + が優勢なところから出発している。いずれのグラフでも、横軸は時間 t で縦軸は $\psi(t)$ である。

まず $\kappa = 0.5$ のとき。すなおに 0 に収束していく。

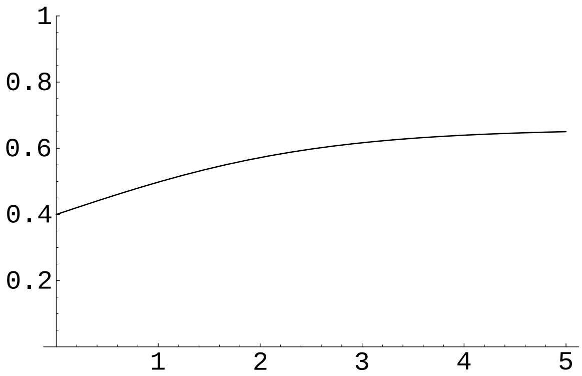


次は $\kappa = 0.8$ のとき。収束は遅くなるがやはり 0 に落ち着く。

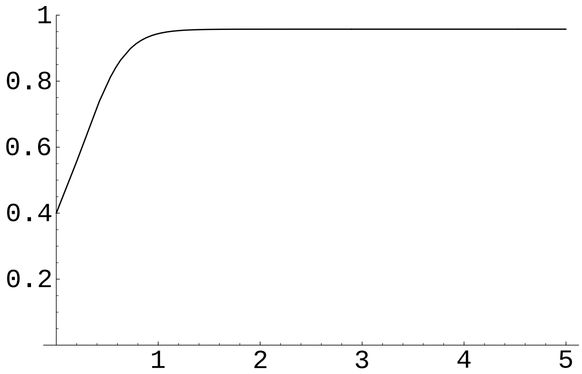


[1]「時間を測る単位を決める」というとわかりやすいかも知れない。ただし、そういうときに「時間スケールを決める」というと、それらしくてかっこいい。

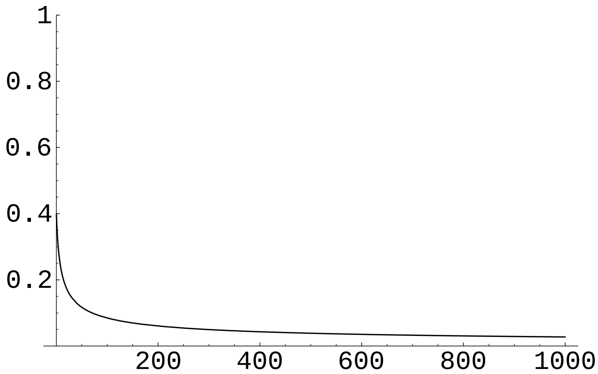
対称性の自発的な破れが生じている $\kappa = 1.2$ のとき。解は $\psi_+^*(1.2) \simeq 0.659$ に近づいていく。



$\kappa = 2$ のとき。解は $\psi_+^*(2) \simeq 0.958$ に近づいていく。

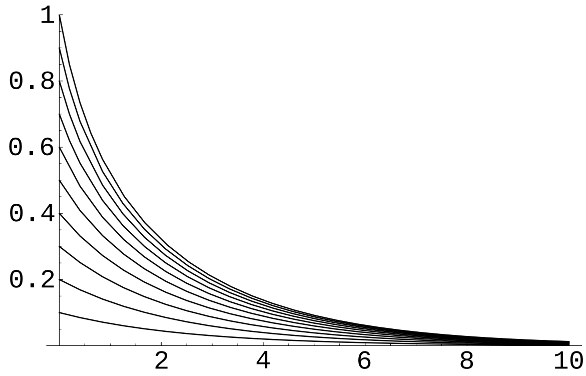


最後は $\kappa = 1$ のとき。この場合は、解は最終的に 0 に収束するが、収束はきわめて遅い。下のグラフではこれまでよりも 200 倍の長い時間についての解のふるまいを示す。



初期値をいろいろに変えても、収束する先が変わらないことも見ておこう。以下の二つのグラフでは、初期値 $\psi(0)$ を 0.1 から 1.0 まで 0.1 刻みにとり、方程式を解いた結果を重ねてプロットした。

これは $\kappa = 0.8$ のとき。



これは $\kappa = 1.2$ のとき。