

実数の構成について

田崎清明

目標

自然数の集合を $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ 、整数の集合を $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ と書く。有理数の集合は

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\} \quad (1)$$

である。ただし、 $p \in \mathbb{N}$ について

$$\frac{n}{m} = \frac{pn}{pm} \quad (2)$$

と約束する。

有理数についての大小関係、和、差、積、商、大小関係はすべて既知として、以下では実数の集合 \mathbb{R} を構成する。

有理数の切断

有理数には、たとえば $\sqrt{2}$ のように、「存在するはずの数」が抜けていることを見た。このような「抜けている数」が無理数である。 \mathbb{Q} に次々と無理数を付け加えることで実数の集合 \mathbb{R} を作ろう。

しかし、有理数の集合しか知らないのに、どんな数がそこから抜けているかを知ることができるのだろうか？ $\sqrt{2}$ とか π とか具体的な数を考えるだけではもちろん不十分だ。「抜けている数」をすべて見つけ出す方法が必要である。

無理数をすべて見つけ出すことは実際に可能で、それにはいくつかのやり方がある。ここでは、「有理数の切断」というアイデアを用いる（なかなか楽しい）方法を紹介する¹。

定義 1 (有理数の切断) 有理数の切断とは、二つの部分集合 $A_{小}, A_{大} \subset \mathbb{Q}$ の組 $(A_{小}, A_{大})$ で、以下の性質をもつものをいう。

- (i) $A_{小} \cup A_{大} = \mathbb{Q}$ かつ $A_{小} \cap A_{大} = \emptyset$ が成り立つ。つまり、 $A_{小}, A_{大}$ は \mathbb{Q} を二つに分ける。
- (ii) 任意の $a \in A_{小}, b \in A_{大}$ について $a < b$ が成り立つ。つまり、 $A_{大}$ は $A_{小}$ よりも「上」にある。

¹ 「有理数から作られる全てのコーシー列の集合」を出発点にする方法もよく用いられる。コーシー列を使う方法は、より一般的な「距離空間の完備化」に利用できるという強みがある。

有理数は稠密^{ちゆうみつ}なので、切断の上と下にはいくらでも近い数が含まれている。後で使うので、これを明文化しておく。

補題 2 ($A_{小}, A_{大}$) を有理数の切断とする。任意の有理数 $\varepsilon > 0$ について、 $0 < b - a \leq \varepsilon$ を満たす $a \in A_{小}, b \in A_{大}$ が取れる。

証明：まず適当に $a_0 \in A_{小}, b_0 \in A_{大}$ をとる。 $(a_0 + b_0)/2$ は有理数だから $A_{小}$ か $A_{大}$ のいずれか一方に含まれる。もし前者なら $a_1 = (a_0 + b_0)/2, b_1 = b_0$ とおき、後者なら $a_1 = a_0, b_1 = (a_0 + b_0)/2$ とおく。こうすると、 $a_1 \in A_{小}, b_1 \in A_{大}$ であり、 $b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2$ となる。あとは同じことをくり返して、 $a_j \in A_{小}, b_j \in A_{大}$ を定義する。 $b_j - a_j = (b_0 - a_0)/2^j$ だから j を十分に大きくすれば右辺は ε 以下となる。 ■

ある集合 $A \subset \mathbb{Q}$ の最大値が a であるとは、任意の $c \in A$ について $c \leq a$ となることをいう。最小値の定義も同様。

切断 ($A_{小}, A_{大}$) は、次の四つのタイプに分類できる。

1. $A_{小}$ に最大値があり、 $A_{大}$ に最小値がある。
2. $A_{小}$ に最大値がなく、 $A_{大}$ に最小値がある。
3. $A_{小}$ に最大値があり、 $A_{大}$ に最小値がない。
4. $A_{小}$ に最大値がなく、 $A_{大}$ に最小値がない。

ただし有理数の切断にタイプ 1 はあり得ない²。なぜなら、 $A_{小}$ の最大値を a 、 $A_{大}$ の最小値を b とすると $c = (a + b)/2$ も有理数で、 $a < c < b$ を満たす。これは c が $A_{小}$ にも $A_{大}$ にも属さないことを意味するが、それは切断の定義からあり得ない。

タイプ 2 やタイプ 3 は簡単である。たとえば、

$$A_{小} = \left\{ a \in \mathbb{Q} \mid a \geq \frac{1}{2} \right\}, \quad A_{大} = \left\{ a \in \mathbb{Q} \mid a < \frac{1}{2} \right\} \quad (3)$$

のように $1/2$ を境に \mathbb{Q} を分割すればタイプ 3 の切断が得られる。

直感的にタイプ 4 の切断はないと思うかも知れないが、ちゃんと存在する。というより、タイプ 4 の切断がこれからの話の鍵になるのだ。たとえば、「 \mathbb{Q} を $\sqrt{2}$ を境に分割する」ことを考えて、

$$A_{小} = \left\{ a \in \mathbb{Q} \mid a \leq 0 \text{ または } a^2 \leq 2 \right\}, \quad A_{大} = \left\{ a \in \mathbb{Q} \mid a \geq 0 \text{ かつ } a^2 \geq 2 \right\} \quad (4)$$

としよう。これはタイプ 4 の切断である。

²整数の切断はすべてタイプ 1 になる。

切断 (4) がタイプ 4 である証明： $A_{\text{大}}$ が最小値を持たないことを示そう。 $A_{\text{大}}$ の任意の元を a とする。 $a^2 \geq 2$ だが $a^2 = 2$ となる有理数はないので $a^2 > 2$ である。 $n \in \mathbb{N}$ を十分に大きく取れば、 $\{a - (1/n)\}^2 = a^2 - 2a/n + 1/n^2 > 2$ とできるから、このとき $a - (1/n) \in A_{\text{大}}$ となる。任意の $A_{\text{大}}$ の元に対してそれより小さい $A_{\text{大}}$ の元があるのだから、 $A_{\text{大}}$ は最小値を持たない。 $A_{\text{小}}$ が最大値を持たないことも同様に示せる。 ■

無理数の構成

タイプ 4 の切断が存在することがわかったので、これを鍵にして無理数を構成し、無理数の演算も定義しよう。

定義 3 (無理数の定義) タイプ 4 の \mathbb{Q} の切断 $(A_{\text{小}}, A_{\text{大}})$ が一つの無理数に対応するとみなす。対応する無理数を α とするとき、この対応を $(A_{\text{小}}, A_{\text{大}}) \leftrightarrow \alpha$ と書く。

タイプ 4 の切断では、有理数を大小の二つのグループに分けたのに、ちょうど境目の数が (有理数の範囲では) 存在しない。直観的に言えば、この境目のところにはちょうど一つの無理数が「ある」はずだ。そこで、タイプ 4 の切断 $(A_{\text{小}}, A_{\text{大}})$ が一つ存在することによって対応する無理数 α を「みつけた」と考えることができる。

より形式的には、上の定義は純粋な定義だと考える。無理数というのはあくまでタイプ 4 の切断 $(A_{\text{小}}, A_{\text{大}})$ そのものであり、簡単のため、同じものを α という名前で呼んでいるという立場をとるのである。数学書にはこういう形式的な書き方を採用する物が多いが、多くの数学者が直観的なものの見方をしていると思う。

切断 $(A_{\text{小}}, A_{\text{大}})$ の境目にあるのが無理数 α だと考えれば以下の大小関係の定義は自然だ。

定義 4 (無理数と有理数の大小関係) $(A_{\text{小}}, A_{\text{大}}) \leftrightarrow \alpha$ のとき、任意の $a \in A_{\text{小}}, b \in A_{\text{大}}$ について、 $a < \alpha$ および $\alpha < b$ と定義する。

たとえば、(4) の切断で決まる無理数を (通常のリールの通り) $\sqrt{2}$ と書こう。 $1^2 = 1 < 2$ と $2^2 = 4 > 2$ より $1 \in A_{\text{小}}, 2 \in A_{\text{大}}$ である。よって、 $1 < \sqrt{2} < 2$ (というよく知っている関係) が得られる。

上の定義からほぼ自動的に以下の結果がでる。

系 5 (無理数と有理数のあいだには有理数がある) α を無理数とする。 $a < \alpha < b$ を満たす任意の $a, b \in \mathbb{Q}$ に対して $a < a' < \alpha < b' < b$ を満たす $a', b' \in \mathbb{Q}$ が存在する。

証明： $(A_{\text{小}}, A_{\text{大}}) \leftrightarrow \alpha$ とする。 $a < \alpha$ は $a \in A_{\text{小}}$ を意味する。 $A_{\text{小}}$ は最大値をもたないから $a' \in A_{\text{小}}$ で $a < a'$ を満たす物がある。これが求める a' である。 b' も同様。 ■

無理数の演算 $p \neq 0, q$ を有理数とする。また、 $(A_{小}, A_{大}) \leftrightarrow \alpha$ を任意の無理数（つまりタイプ4の切断）とする。このとき、 $p > 0$ なら

$$\tilde{A}_{小} = \{px + q \mid x \in A_{小}\}, \quad \tilde{A}_{大} = \{px + q \mid x \in A_{大}\} \quad (5)$$

によって、 $p < 0$ なら

$$\tilde{A}_{小} = \{px + q \mid x \in A_{大}\}, \quad \tilde{A}_{大} = \{px + q \mid x \in A_{小}\} \quad (6)$$

とする。明らかに $(\tilde{A}_{小}, \tilde{A}_{大})$ は切断であり、またタイプ4であることも容易に証明できる。この切断に対応する無理数を

$$(\tilde{A}_{小}, \tilde{A}_{大}) \leftrightarrow p\alpha + q \quad (7)$$

と書く。これで無理数に有理数をかけたり足したりできるようになった。

これを使うとすぐに以下の意味で、「無理数がたくさんある」ことがわかる。

定理 6 (有理数と有理数のあいだには無理数がある) $a < b$ を満たす任意の有理数 a, b に対して $a < \alpha < b$ を満たす無理数 α が存在する。

証明：証明の仕方はいろいろあるがちよつと怠慢な方法を使う。有理数 p, q を $p + q = a, 2p + q = b$ となるように選ぶ ($p > 0$ になる)。 $(A_{小}, A_{大})$ を (4) の ($\sqrt{2}$ に相当する) 切断とする。ここから (6) で決まる切断 $(\tilde{A}_{小}, \tilde{A}_{大})$ に対応する無理数を α と書くと ($1 \leq \sqrt{2} \leq 2$ だから) $a < \alpha < b$ である。■

次に無理数どうしの和を定義する。 $(A_{小}, A_{大}) \leftrightarrow \alpha$ と $(B_{小}, B_{大}) \leftrightarrow \beta$ を無理数（タイプ4の切断）とする。ここで、

$$C_{小} = \{x + y \mid x \in A_{小}, y \in B_{小}\}, \quad C_{大} = \{x + y \mid x \in A_{大}, y \in B_{大}\} \quad (8)$$

とする。 $a \in C_{小}$ であれば、 $b < a$ となる任意の $b \in \mathbb{Q}$ が $b \in C_{小}$ を満たすことが簡単に分かる。また、 $C_{小}$ が最大値を持たないこともすぐに分かる。同様に、 $C_{大}$ は最小値をもたず上のほうにずっと続いていることがいえる。

すると $(C_{小}, C_{大})$ は \mathbb{Q} の切断になりそうだが、必ずしもそうではない。 $\alpha + \beta$ が有理数 p になる場合には $C_{小} \cup C_{大}$ から p が抜けているはずだ。実際、以下が成り立つ。

補題 7 $C_{小} \cup C_{大} = \mathbb{Q}$ であるか、 $C_{小} \cup C_{大} = \mathbb{Q} \setminus \{p\}$ (p は有理数) であるかのいずれかである。

前者の場合 $(C_{小}, C_{大})$ はタイプ4の切断であり一つの無理数 γ が対応するので、 $\alpha + \beta = \gamma$ と定義する。後者の場合には $\alpha + \beta = p$ と定義する。

補題 7 の証明： $a < b$ を満たす二つの有理数 a, b が $C_{小} \cup C_{大}$ に属しないと仮定し、 $\varepsilon = (b - a)/3$ とする。補題 2 により、 $x \in A_{小}, x' \in A_{大}$ で $0 < x' - x \leq \varepsilon$ となるもの、 $y \in B_{小}, y' \in B_{大}$ で

$0 < y' - y \leq \varepsilon$ となるものがとれる。二つの不等式を足せば $0 < (x' + y') - (x + y) \leq 2\varepsilon$ である。一方、定義により $z = x + y \in C_{\text{小}}$ および $z' = x' + y' \in C_{\text{大}}$ だから、 $z < a$ かつ $b < z'$ である。よって $z' - z > b - a = 3\varepsilon$ だが、上の結果から $z' - z \leq 2\varepsilon$ となり、矛盾。■

無理数の差も同じように定義してよいが、次のようにすると手間が省ける。タイプ4の切断 $(A_{\text{小}}, A_{\text{大}}) \leftrightarrow \alpha$ に対して

$$A_{\text{小}}^- = \{-x \mid x \in A_{\text{大}}\}, \quad A_{\text{大}}^- = \{-x \mid x \in A_{\text{小}}\} \quad (9)$$

とすれば、 $(A_{\text{小}}^-, A_{\text{大}}^-)$ もタイプ4の切断になる。これに対応する無理数を $(A_{\text{小}}^-, A_{\text{大}}^-) \leftrightarrow -\alpha$ と書く。明らかに $-(-\alpha) = \alpha$ であり、 $\alpha > 0$ なら $-\alpha < 0$ 、また $\alpha < 0$ なら $-\alpha > 0$ である。

これを利用すれば無理数の差 $\alpha - \beta$ は $\alpha + (-\beta)$ に等しいと定義できる。

無理数の積と商もほぼ同じアイデアで定義できる。負の数と正の数が混在すると面倒なので、正の数のみについて定義しよう。負の数については通常のルール（たとえば $\alpha(-\beta) = -\alpha\beta$ ）で拡張すればいい。

$(A_{\text{小}}, A_{\text{大}}) \leftrightarrow \alpha > 0$ と $(B_{\text{小}}, B_{\text{大}}) \leftrightarrow \beta > 0$ を正の無理数とし、

$$\begin{aligned} D_{\text{小}} &= \left\{ w \mid w \leq 0 \text{ または非負の } x \in A_{\text{大}}, y \in B_{\text{大}} \text{ について } w = xy \right\}, \\ D_{\text{大}} &= \left\{ xy \mid x \in A_{\text{大}}, y \in B_{\text{大}} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

とする。 $(D_{\text{小}}, D_{\text{大}})$ が切断になっているときには（それは必然的にタイプ4なので）対応する無理数が $\alpha\beta$ に等しいと定義する。 $(D_{\text{小}}, D_{\text{大}})$ が切断でないときは、 $D_{\text{小}} \cup D_{\text{大}}$ は \mathbb{Q} から一つの有理数を抜いたものであることが示せるので、 $\alpha\beta$ はその有理数に等しいと定義する。

最後に $(A_{\text{小}}, A_{\text{大}}) \leftrightarrow \alpha > 0$ について

$$\begin{aligned} A'_{\text{小}} &= \left\{ y \mid y \leq 0 \text{ または } x \in A_{\text{大}} \text{ について } y = 1/x \right\}, \\ A'_{\text{大}} &= \left\{ 1/x \mid x > 0, x \in A_{\text{小}} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

とすれば $(A'_{\text{小}}, A'_{\text{大}})$ はタイプ4の切断になるので、 $(A'_{\text{小}}, A'_{\text{大}}) \leftrightarrow 1/\alpha$ によって逆数 $1/\alpha$ を定義する。

無理数の大小関係 $(A_{\text{小}}, A_{\text{大}}) \leftrightarrow \alpha$ と $(B_{\text{小}}, B_{\text{大}}) \leftrightarrow \beta$ を無理数（タイプ4の切断）とする。

補題 8 $(A_{\text{小}}, A_{\text{大}})$ と $(B_{\text{小}}, B_{\text{大}})$ は以下の三つの包含関係のいずれかを満たす。(i) $A_{\text{小}} = B_{\text{小}}$, $A_{\text{大}} = B_{\text{大}}$ 、(ii) $A_{\text{小}} \subsetneq B_{\text{小}}$, $A_{\text{大}} \supsetneq B_{\text{大}}$ 、(iii) $A_{\text{小}} \supsetneq B_{\text{小}}$, $A_{\text{大}} \subsetneq B_{\text{大}}$

証明：(i) でない、つまり $A_{\text{小}} \neq B_{\text{小}}$ とする。 $c \in A_{\text{小}}$, $c \notin B_{\text{小}}$ となる $c \in \mathbb{Q}$ があるか、または、 $c \notin A_{\text{小}}$, $c \in B_{\text{小}}$ となる $c \in \mathbb{Q}$ がある。

前者とする。 $c \in B_{\text{大}}$ である。よって任意の $b \in B_{\text{小}}$ について $b \leq c$ である。 $c \in A_{\text{小}}$ だったから、これは $b \in A_{\text{小}}$ を意味する。つまり $B_{\text{小}} \subseteq A_{\text{小}}$ がいえた（よって自動的に $A_{\text{大}} \subseteq B_{\text{大}}$ もいえる）。(iii)に相当。後者の場合も同様にして(ii)とわかる。■

上の補題をふまえて、(i)ならば $\alpha = \beta$ 、(ii)ならば $\alpha < \beta$ 、(iii)ならば $\alpha > \beta$ と定義する。この定義から明らかに以下が成り立つ。

系 9 (無理数と無理数のあいだには有理数がある) $\alpha < \beta$ を満たす任意の無理数 α, β に対して $\alpha < a < \beta$ を満たす有理数 a が存在する。

この結果と系 5 と定理 6 を組み合わせると次の結果が得られる。

系 10 (無理数と無理数のあいだには無理数がある) $\alpha < \beta$ を満たす任意の無理数 α, β に対して $\alpha < \gamma < \beta$ を満たす無理数 γ が存在する。

つまり、無理数も「びっしりと」詰まっているのである。

注意 こうして無理数についての演算や大小関係を定義してきた。これで実数を色々いじっていいことになるが、真面目に言うと、こうやって定義した（無理数を含む）演算や大小関係が、演算と大小関係が満たすべき通常のルール（たとえば、 $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ とか、「 $x \leq y$ かつ $v \leq w$ なら $x + v \leq y + w$ 」など）をちゃんと満たしていることを証明する必要がある。これは少し面倒だが、すべての定義が有理数の四則演算と大小関係をもとにしていることを考えると、簡単に証明できる（有理数についてのこれらの関係は知っているという立場をとる）。ここでは、そこまで深入りするのはやめておこう。

実数の構成と基本的な性質

無理数が定義されたので、有理数とあわせることで実数の集合を定義する。

定義 11 (実数の集合の定義) 実数の集合を $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\alpha \mid \alpha \text{は無理数}\}$ と定義する。

実数についても切断を考えることにする。定義は有理数の場合とまったく同じである。

定義 12 (実数の切断) 実数の切断とは、二つの部分集合 $A_{\text{小}}, A_{\text{大}} \subset \mathbb{R}$ の組 $(A_{\text{小}}, A_{\text{大}})$ で、以下の性質をもつものをいう。

- (i) $A_{\text{小}} \cup A_{\text{大}} = \mathbb{R}$ かつ $A_{\text{小}} \cap A_{\text{大}} = \emptyset$ が成り立つ。
- (ii) 任意の $a \in A_{\text{小}}, b \in A_{\text{大}}$ について $a < b$ が成り立つ。

実数の切断についての次の定理は、実数の本質を表わしていると言っていい。実数を切断すると、かならず「切り口」に実数が現れるのだ。これは有理数と実数の性質が本質的に異なっていることを示している。

定理 13 (実数の連続性) 実数の切断は、タイプ2かタイプ3かのいずれかである。

証明: $\tilde{A}_小 = A_小 \cap \mathbb{Q}$, $\tilde{A}_大 = A_大 \cap \mathbb{Q}$ とすれば、 $(\tilde{A}_小, \tilde{A}_大)$ は \mathbb{Q} の切断になる。よって $(\tilde{A}_小, \tilde{A}_大)$ は、タイプ2, 3, 4のいずれかである。

$(\tilde{A}_小, \tilde{A}_大)$ がタイプ2だとする。 $\tilde{A}_大$ に最小値 $a \in \mathbb{Q}$ がある。以下で、この a は $A_大$ の最小値でもあることを示す。そうすれば $(A_小, A_大)$ もタイプ2とわかる。 a が $A_大$ の最小値でないと仮定すると、 $\alpha < a$ を満たす無理数 $\alpha \in A_大$ が存在する。しかし、系5により $\alpha < a' < a$ を満たす有理数 a' がとれる。 a' は $A_大$ に属するから $\tilde{A}_大$ にも属するが、これは a が最小値だったことに矛盾。 $(\tilde{A}_小, \tilde{A}_大)$ がタイプ3だった場合も同様で、 $(A_小, A_大)$ もタイプ3とわかる。

最後に $(\tilde{A}_小, \tilde{A}_大)$ がタイプ4だったとすると対応する無理数 α が決まる。 α はもちろん $A_小$ か $A_大$ のどちらかに属するが、 α が最大値または最小値になることは(上と同様にして)示せる。よって $(A_小, A_大)$ はタイプ2かタイプ3である。■

次の定理も実数の集合が(少なくとも数列の極限という観点では)「自然」であることを示している。

定理 14 (有界単調数列の収束) 実数の数列 t_1, t_2, \dots がある。適当な実数 T があって、任意の $i \in \mathbb{N}$ について $t_i \leq t_{i+1}$ および $t_i \leq T$ が成り立つとする。すると、極限 $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i$ が実数の範囲で存在する。

極限の意味は有理数の場合と同じである。実数の数列 a_1, a_2, \dots について $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \alpha$ であるとは、任意の(小さい)実数 $\varepsilon > 0$ に対して、(十分に大きい) $N \in \mathbb{N}$ があって、 $i \geq N$ となる任意の i について $|a_i - \alpha| \leq \varepsilon$ が成り立つことである。

証明: 数列を使って、

$$A_小 = \left\{ x \mid \text{ある } N \in \mathbb{N} \text{ があって } x \leq t_N \right\}, \quad A_大 = \mathbb{R} \setminus A_小 \quad (12)$$

によって切断 $(A_小, A_大)$ を定義する。これはタイプ2か3なので、 $A_小$ の最大値または $A_大$ の最小値が存在する。これを α と書く。いずれの場合にも任意の ε について $\alpha > x > \alpha - \varepsilon$ を満たす $x \in A_小$ が存在する。よって $A_小$ の定義から、ある N について $t_N \geq x$ が成り立つ。任意の $i \geq N$ について、 $t_i \geq t_N$ であること、 $t_i \in A_大$ なので $t_i \leq \alpha$ であることから、 $\alpha \geq t_N > \alpha - \varepsilon$ である。これは $|t_i - \alpha| \leq \varepsilon$ を意味するので極限の存在が示された。■

関数の極限と連続性

関数(より正確には、実数上の実数値関数) $f(\cdot)$ とは、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して定まった $f(x) \in \mathbb{R}$ を対応させる「しかけ」のことをいう。

関数の極限と連続性を定義しておこう。

定義 15 (関数の極限) $a \in \mathbb{R}$ とする。任意の (小さな) 実数 $\varepsilon > 0$ に対して (十分に小さな) 実数 $\delta > 0$ が存在して、 $|x - a| \leq \delta$ を満たす任意の x について $|f(x) - \alpha| \leq \varepsilon$ となるとき、「 $x \rightarrow a$ における $f(x)$ の極限が α である」といい、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ と書く。

定義 16 (関数の連続性) $a \in \mathbb{R}$ とする。関数 $f(\cdot)$ が a において連続とは、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在して $f(a)$ に等しいことである。極限を使わずに表現すれば、任意の (小さな) 実数 $\varepsilon > 0$ に対して (十分に小さな) 実数 $\delta > 0$ が存在して、 $|x - a| \leq \delta$ を満たす任意の x について $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ となることである。

次の定理はほとんど当たり前ののだが、われわれの議論にとっては重要な意味をもつ。

定理 17 実数の数列 a_1, a_2, \dots が極限 $\lim_{i \uparrow \infty} a_i = \alpha$ をもち、関数 $f(\cdot)$ が α において連続なら、 $\lim_{i \uparrow \infty} f(a_i) = f(\alpha)$ が成り立つ。

証明：任意の実数 $\varepsilon > 0$ をとる。まず $f(\cdot)$ の連続性から、実数 $\delta > 0$ が存在して、 $|x - \alpha| \leq \delta$ を満たす任意の x について $|f(x) - f(\alpha)| \leq \varepsilon$ となる。次にここで決まった $\delta > 0$ を数列の収束の定義における「任意の $\varepsilon > 0$ 」として使う。すると $N \in \mathbb{N}$ がとれて、任意の $i \geq N$ について $|a_i - \alpha| \leq \delta$ である。これを上に代入すれば、 $|f(a_i) - f(\alpha)| \leq \varepsilon$ となる。つまり、 $\lim_{i \uparrow \infty} f(a_i) = f(\alpha)$ が言えた。 ■