

コインがぐりぐりと回り転がる運動について

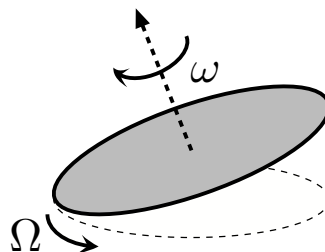
田崎清明

講義^{*1}では触れられなかった、回転運動の真面目な計算をここに書いておく。ただし、剛体の力学についての基本的な知識は仮定して、この問題に固有のことだけを書くので、剛体の力学を学んでいない人は読まないほうがよい。

また、私自身、剛体の力学については素人なので、とんでもない間違いをしている可能性もある。おかしいところをみつけた方はご指摘ください。

半径 R で厚みが無視できる、質量 M の一様なコインが平らな床の上で運動する。

特に、コインの重心が動かず、コインが床と一定の角度 θ を保ったまま滑らずに転がるような定常運動を考える^{*2}。このときコインと床の接触点は、床の上の半径 $R \cos \theta$ の円周（下図の点線）上を動く。



コインの運動を「自転」と「公転」の合成と考えるとわかりやすい。自転とはコインの中心軸の周りの回転で、ここでは、上から見たとき時計回りに角速度 $\omega > 0$ で回転するとしよう。公転は上の図の配置全体が回転することだが、接触点が（床の上の）円周上を回る運動と思ってもよい。この回転の向きは自転とは逆の反時計回りである。角速度を $\Omega > 0$ とする。

コインが滑らないことから、接触点でのコインの速度はゼロ。これは自転による速度と公転による速度がちょうど打ち消し合うということなので、ただちに $R\omega = R \cos \theta \Omega$ 、つ

^{*1} 2014年4月14日、21日の駒場での「現代物理学」の講義のこと。このノートには最も面白い部分は書いていない。ここで扱っている問題はケンブリッジ数学科の時枝正さんの講演で学んだ。興味のある方は以下の動画の33分30秒以降をどうぞ。

<https://www.youtube.com/watch?v=f07KzjnL2eE>

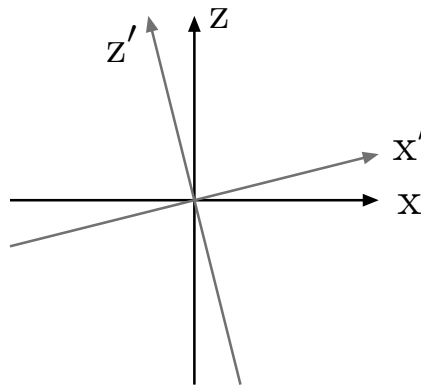
^{*2} もちろん、もっと一般的な運動がありうる。コインがクルクルと運動すると、しばらく後にはこのような解に落ち着くように見えるが、それを正当化する理由を（そもそも、本当にこの解に落ち着くかどうか）私は完全には理解していない。

まり、

$$\omega = \Omega \cos \theta \quad (1)$$

という関係が得られる。

これから、前ページの図にある、ある一瞬でのコインの状態に着目して少し計算する。ここで、下図のような二つのデカルト座標系を使うと便利だ。(今、考えている瞬間の)接触点を原点とし、床の上の円の中心に向かう軸を x 軸、床に垂直な軸を z 軸とする。 x 軸、 z 軸を xz 平面で左回りに θ だけ回転した座標軸を、それぞれ、 x' 軸、 z' 軸としよう。 z' 軸はコインの自転軸と一致している。二つの座標系で y 軸は共通。



まず、回転の角速度ベクトルを求めよう。自転の角速度ベクトルは、 $x'yz'$ 系で $(0, 0, -\omega)$ である。公転の角速度ベクトルは xyz 系で $(0, 0, \Omega)$ で、 $x'yz'$ 系では $(\Omega \sin \theta, 0, \Omega \cos \theta)$ である。

以下ではしばらく $x'yz'$ 系を使うのでいちいち断らない。自転と公転の寄与を足し、(1)に注意すれば、全角速度ベクトルは $(\Omega \sin \theta, 0, 0)$ とわかる。よって慣性モーメントテンソルとの積をとることで、角運動量が^{*3}

$$\mathbf{J}' = \begin{pmatrix} I_0/2 & 0 & 0 \\ 0 & I_0/2 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I_0 \Omega / 2) \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

だとわかる。ここで、

$$I_0 = \frac{MR^2}{2} \quad (3)$$

^{*3} $x'yz'$ 系の量だということを示すために \mathbf{J} にもプライムをつけた。あまり洗練された記法ではないけれど。

とした。同様に、回転の運動エネルギー（この場合には全運動エネルギー）も

$$K = \frac{1}{2} (\Omega \sin \theta \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} I_0/2 & 0 & 0 \\ 0 & I_0/2 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{I_0}{4} (\Omega \sin \theta)^2 \quad (4)$$

と求められる。

ここから先は xyz 系に切り替えよう。角運動量ベクトルは、回転の行列をかけて、

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (I_0 \Omega / 2) \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I_0 \Omega / 2) \sin \theta \cos \theta \\ 0 \\ (I_0 \Omega / 2) (\sin \theta)^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

となる。

さて、ここまではずっとある一瞬のことを考えていたが、ここでコインが動くことを思い出す。接触点が角速度 Ω で回転するのだから、上の角運動量ベクトル \mathbf{J} も同じ角速度で z 軸の回りをクルクルとまわる。よって、角運動量の時間変化は、

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ (I_0 \Omega^2 / 2) \sin \theta \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

だとわかる^{*4}。一方、コインには接触点で鉛直方向上向きに大きさ Mg の抗力が働くので、トルクは

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ MgR \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

である。これらが等しいことから、

$$\Omega = 2\sqrt{\frac{g}{R}} \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \quad \text{あるいは} \quad \sin \theta = \frac{4g}{R} \frac{1}{\Omega^2} \quad (8)$$

という関係が得られる ((3) を使った)。つまり、 Ω と θ がこの関係で結ばれるときだけ、重心が動かない定常解が可能だということだ。

最後に、条件 (8) と I_0 の表式 (3) を運動エネルギーの表式 (4) に代入すれば

$$K = \frac{1}{2} MgR \sin \theta \quad (9)$$

^{*4} \mathbf{J} の x 成分を Ω 倍したものが $d\mathbf{J}/dt$ の y 成分になっている。なぜこれでいいかは絵を描いてみるとわかると思う。

となる。位置エネルギー $MgR \sin \theta$ と合わせれば、全エネルギーが

$$E = \frac{3}{2}MgR \sin \theta = 6Mg^2 \frac{1}{\Omega^2} \quad (10)$$

のように Ω と結ばれることがわかる。これが講義で重要な役割を果たした関係である。