2015 年 10 月

拡散方程式の解の収束について

田崎晴明

講義でぼくが（エレガントに）できないといったところを受講生のお一人に賢いやりかたを教えてもらいました。

$$\rho_0(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\Bigl[-\frac{x^2}{4Dt}\Bigr] \tag{1}$$

$$\rho_1(x,t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}}\rho_0(x-nL,t) \tag{2}$$

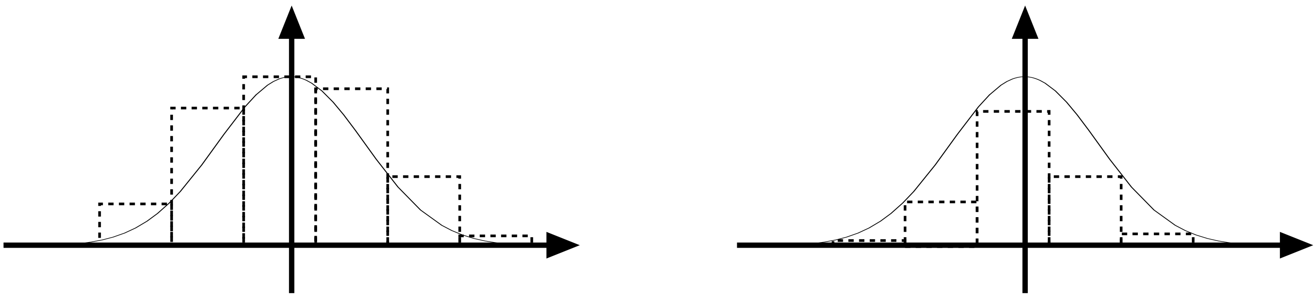
とするとき、任意の $x\in[-L/2,L/2]$ について、

$$\lim_{t\uparrow\infty}\rho_1(x,t) = \frac{1}{L} \tag{3}$$

を示すというのが問題。

さて、われわれは $\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\rho_0(x,t)=1$ であることを知っているわけだが、あえて、区分求積の思想でこの積分の上界と下界をつくろう。

$a\in[-L/2,L/2]$ を固定して、実数 $\mathbb{R}$ を区間 $[a+(n-1)L,a+nL]$ の集まり（ここで $n\in\mathbb{Z}$）に分割する。あとは、下の図のように「長方形の面積の和」を使って本来の積分をおさえるだけ。左図が上界で右図が下界。



上界は、真ん中の長方形の扱いに注意して、

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}dx\,\rho_0(x,t) \le L\Bigl\{\rho_0(0,t)+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\rho_0(a+nL,t)\Bigr\} \tag{4}$$

となる。ところが括弧の中の第二項は $\rho_1(a,t)$ そのものなので、

$$\rho_1(a,t) \ge \frac{1}{L}-\rho_0(0,t) \tag{5}$$

を得る。

下界も図をみれば、

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \rho_0(x,t) \geq L\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} \rho_0(a+nL,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_0(a-nL,t)\Big\} = L\{\rho_1(a,t) - \rho_0(a,t)\} \quad (6)$$

となり、

$$\rho_1(a,t) \leq \frac{1}{L} + \rho_0(a,t) \quad (7)$$

を得る。

$t \uparrow \infty$ で $\rho_0(0,t) \downarrow 0$, $\rho_0(a,t) \downarrow 0$ に注意すれば、(5) と (7) から目標の (3) が示される。