2016 年 6 月 19 日、田崎晴明

「現代物理学」レポート

1-a $\rho \in \{0, 1/N, 2/N, \ldots, 1\}$ について $P(\rho)$ の厳密な上界を

$$P(\rho) \le e^{-N\psi(\rho)+g_N}$$

という形に書き、$\lim_{N\uparrow\infty} |g_N|/N = 0$ を示せ。

1-b 素事象 $i = 1, 2, \ldots, \Omega$ の確率を p_i とする。同じ系を N 個用意したとき、素事象 i が生じている系の個数を $\hat{N}_i$ とする。$\sum_{i=1}^{\Omega} M_i = N$ を満たす $M_1, \ldots, M_\Omega$ について、確率 $\mathrm{Prob}[\hat{N}_1 = M_1, \hat{N}_2 = M_2, \ldots, \hat{N}_\Omega = M_\Omega]$ の $N \gg 1$ のときのふるまいを求めよ（結果を相対エントロピーで表すとよい）。

1-c 「固体」のモデルで系全体を n 個の部分に分割。i 番目の部分の励起分子の密度を $\hat{\rho}_i$ とする。$N \gg n$ であればほぼ確実に $\hat{\rho}_i \simeq \rho_0$ となることを示せ。

2-a 「固体」のモデル（N 個の分子があり、各々がエネルギー 0 の基底状態かエネルギー $\epsilon_0 > 0$ の励起状態のいずれかをとりうる）をカノニカル分布で扱い、全エネルギーの期待値 $\langle E \rangle$ を T の関数として求めよ。

2-b 講義と同じスピン系で、四つの異なったスピンが同じ向きにそろいたがるモデルを考えよう。スピン配位 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N)$ に対応するエネルギーを

$$E_{\boldsymbol{\sigma}} = -\frac{1}{N^3} \sum_{\substack{i,j,k,\ell=1,\ldots,N \\ (i>j>k>\ell)}} \sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_\ell$$

とする。$N \gg 1$ として、温度 T のカノニカル分布での磁化 $N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i$ のふるまいを解析し対称性が自発的に破れているかどうかを調べよ。温度 T ではなく $\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T) > 0$ を用いるといい。

2-c 相互作用のある気体のきわめて単純化したモデルを考える。一つの箱の中に気体分子が入れる「場所」が N 個ある。各々の「場所」には最大でも一個の分子が入れるとする（つまり、各々の「場所」は空っぽであるか、分子が一個入っているかのいずれか）。

　このような箱が二つある。分子は全部で M 個あり、分子は二つの箱の間を行き来できる。分子の平均密度は $\rho_0 = M/(2N)$ である。箱 1 の中の分子の数を M_1、箱 2 の中の分

子の数を M_2 と書こう（よって $M_1+M_2=M$）。$v\neq 0$ を定数とし、分子数 M_1, M_2 の配置に対応するエネルギーを

$$E_{M_1,M_2}=v\Big(\frac{(M_1)^2}{N}+\frac{(M_2)^2}{N}\Big)$$

とする。つまり、各々の箱の中の分子どうしが相互作用しあっており、$v>0$ が斥力、$v<0$ が引力に対応する。$N\gg 1$ として、温度 T のカノニカル分布での $\hat{M}_1/N$ のふるまいを解析し対称性が自発的に破れているかどうかを調べよ。このモデルのパラメターは v,ρ_0,$\beta=1/(k_{\mathrm{B}}T)>0$ である。